

Szakdolgozat

Molnár Kata
matematikatanár - informatikatanár
osztatlan tanárszak

2025.

Szakedolgozat

Hogyan készítsünk Dobble-típusú játékokat?

Témavezetők:

Héger Tamás

egyetemi adjunktus

ELTE TTK

Számítógéptudományi Tanszék

Csapodi Csaba

egyetemi adjunktus

ELTE TTK Matematikatanítási és

Módszertani Központ

Készítette:

Molnár Kata

matematikatanár - informatikatanár

osztatlan tanárszak

Tartalomjegyzék

1. Dobble-típusú kártyajátékok	3
1.1. Dobble	3
1.2. Møbee	4
1.3. Gemini	5
2. A t-rendszerek	6
2.1. Illeszkedési struktúrák	6
2.2. t -rendszerek	10
2.3. Játék t -rendszerekből	12
2.4. Blokkrendszerek	14
3. Projektív síkok	21
3.1. Projektív síkok általánosan	21
3.2. Konstrukció véges testtel	23
4. Bisíkok	29
4.1. Bisíkok általánosan	29
4.2. Konstrukció gráfokkal	30
4.3. Konstrukció automorfizmusokkal	37
5. Konstrukciók differenciahalmazokkal	40
5.1. Differenciahalmazok	40
5.2. Multiplikátor tétel bizonyítása	45
6. Möbius-síkok	49
7. A kártyagenerátor felhasználása a gyakorlatban	53
7.1. Játékosítás	53
7.2. Ötletek, tapasztalatok	54
A. Kipróbált kártyapaklik	60
A.1. Alapműveletek	60
A.2. Mértékegységek	62
A.3. Törtek 5 szimbólummal	63
A.4. Törtek 4 szimbólummal	65
B. Véges testek szorzótáblája prímszámra	66
B.1. $GF(4)$	66

B.2. GF(8)	66
B.3. GF(9)	67
C. Bisíkok generálása	67
C.1. $n = 7$	67
C.2. $n = 9$	68
C.3. $n = 11$	69
D. Bisíkok illeszkedési mátrixa	70
D.1. $n = 7$	70
D.2. $n = 9$	71
D.3. $n = 11$	72

Bevezetés

A szakdolgozatom témájának ötlete onnan ered, hogy minden kisgyerek szeret játszani a Dobble kártyákkal, és milyen izgalmas lenne, ha az oktatásban is fel tudnánk használni. Ezáltal az eddigi jótékony hatásai mellett még több területen fejlesztené a gyerekeket, és nem utolsósorban mindenki szívesebben tanul úgy, hogy közben játszik. Az interneten található néhány *Dobble*-hoz hasonló kártyakészítő program, de korlátozott lehetőségekkel rendelkeznek. Így jött az ötlet, hogy megpróbálok egy olyan programot létrehozni, amely sok funkcióval rendelkezik és viszonylag esztétikus végeredményt ad. A legfontosabb szempontom leendő tanárként, hogy oktatásban felhasználható kártyákat lehessen alkotni, és a tanárok számára elérhető legyen online. Ennek eredménye, hogy a kártya generátorom a *DobGen* weboldalon elérhető és használható, mely a <https://dobgen.ttk.elte.hu/> linken érhető el.

A szakdolgozatomban összegyűjtöm az összes szükséges matematika elméletet konstruktív szempontból, amire szükségem volt ahhoz, hogy Dobble-típusú játékot tudjak készíteni. Az írás során a fő szempontom az volt, hogy ha egy matematika szakos pedagógus úgy dönt, hogy meg szeretne ismerkedni a Dobble-hoz hasonló játékokkal és fortélyaival, akkor számára érthető legyen a matematikai háttér, valamint a dolgozat végére el tudjon készíteni saját paklikat.

Az első fejezetben röviden összefoglalom a játéktípusokat, amikkel foglalkozom és bemutatom ezek közül milyen játékok érhetőek el a boltokban. A második fejezetben térek rá a matematikai részre, ebben néhány alapvető illeszkedési struktúrát mutatok be és elkészül az első mini játék is. A következő három fejezetben a játékokhoz szükséges projektív síkokat, illetve bisíkokat definiálok és bemutatok különböző konstrukciókat hozzájuk. A hatodik fejezetben ismertetem a Möbius-síkokat. Az ezekre épülő játékokat nem lehet a programommal generálni, viszont nagyon szép és izgalmas, valamint közel áll a többi játékhoz, amikkel foglalkozok és nem mellesleg magyar vonatkozása van. Ezért úgy gondoltam, hogy helye van a dolgozatomban, viszont terjedelme miatt csak röviden mutatom be. Végül az utolsó fejezetben összefoglalom, milyen hatásai lehetnek az iskolákban a tanulókra a játékosításnak. Bemutatom hogyan alkalmazhatóak az oktatásban a Dobble-típusú játékok és miket tapasztaltam az elkészített kártyapaklik első pár használata során.

A dolgozatomhoz legfőképpen *Szőnyi Tamás* jegyzetét [26] használtam, sok eredményt *Colbourn* és *Dinitz* könyvéből [4] vettem és a témakör átfogó megértéséhez felhasználtam *Assmus* és *Key* könyvét [1], valamint *Beth*, *Jungnickel* és *Lenz* könyvét [10]. A szakdolgozat egységesége és a könnyebb megérthetőség miatt a bizonyításokat minden esetben elsőnek értelmeztem, kijegyzeteltem és végül az alapján, kicsit módosítva írtam le.

Szeretném megköszönni Héger Tamás témavezetőmnek a témaötletet, a rengeteg segítséget, magyarázatot és a hosszú konzultációkkal töltött időt. Szintén köszönöm Csapodi Csaba té-

mavezetőmnek, hogy az utolsó pillantban elvállalt és segített a dolgozat módszertani részében. Hatalmas köszönet bátyámnak, Molnár Róbertnek a sok segítségért a programomban, nélküle nem készülhetett volna el.

1. Dobble-típusú kártyajátékok

Dobble-típusú játéknak tekintem azokat a kártyajátékokat, amelyekben minden kártyán van valahány szimbólum és néhány tetszőleges kártyát figyelve mindig ugyanannyi azonos szimbólum látható. Kicsit konkrétan, van egy v elemszámú alaphalmazunk, ami tartalmazza a szimbólumokat. Szimbólumoknak nagyjából bármit tekinthetünk, majd később látjuk, hogy lehetnek képek, grafikák, szövegek, matematikai kifejezések is a kártyákon. A kártyák az alaphalmaz bizonyos r elemszámú részhalmazai. Ez azt jelenti, hogy minden kártyán r szimbólum van az alaphalmazból. A kártyák közötti kapcsolat pedig az, hogy bármely t kártyát vesszük, λ azonos szimbólum lesz mindegyiken, azaz pont λ olyan szimbólum, mely mindkét kártyán előfordul. Játék szempontjából talán kevésbé, de a paklik elkészítésénél fontos információ még, hogy összesen hány szimbólumot használunk, jelöljük ezt b -vel.

A kártyapaklik egyszerűbb azonosítására, jellemzésére bevezetek egy jelölést. Legyen a fenti paraméterekkel rendelkező játék az $(r, t, \lambda)_b^v$ -játék. A v és b paramétereket külön kezelem, mert azok az általam vizsgált esetek többségében $v = b$, és egyértelműek a többi paraméterből. Ez azt is jelenti, hogy ha létezik egy $(r, t, \lambda)^v$ -játék, akkor abból, ha kiveszünk vagy elveszítünk néhány lapot, marad $w < v$ kártya, akkor lesz egy $(r, t, \lambda)^w$ -játékunk, ami ugyanúgy „működik”, hiszen továbbra is fennáll, hogy bármely t kártyán λ azonos szimbólum lesz.

Ahhoz, hogy egy ilyen kártyapaklit létrehozzunk, már ennyi információból is láthatjuk, a paramétereket nem választhatjuk meg tetszőlegesen. A dolgozatban sok összefüggést, korlátozást bemutatok a paraméterekre vonatkozóan. Ezek előtt azonban tekintsünk át néhány konkrét kártyajátékot. A kapcsolódó matematikai struktúrákat később részletesen tárgyaljuk.

1.1. Dobble

A *Dobble* vagy *Spot it!* nevű játék nagyon népszerű a gyerekek körében, egyszerű szabályai miatt már óvodás kortól izgalmas, de a nagyobbaknak is jelenthet kihívást. Az eredeti játék 55 kártyából áll, ez összesen 57 szimbólumot jelent, minden kártyán 8 szimbólum látható és bármely 2 kártyán pontosan 1 azonos szimbólum található. A játéknak vannak olyan változatai, amelyek kártyáin kevesebb ábra van, valamint különböző témájú képekkel is kapható. Többféle játékszabállyal játszható, de a játék lényege, hogy két kártyát figyelve a lehető leggyorsabban megtaláljuk az azonos szimbólumot. [8][7]

Érdekes, hogy játék közben, amilyen egyszerűnek tűnik, bele sem gondolunk, hogy milyen komoly matematika áll mögötte. A Dobble hátterében egy véges projektív sík áll, mely meghatározza, hogy mely kártyára, mely képeknek kell kerülnie, valamint azt, hogy hány kártyát tudunk készíteni. Pontosabban egy 7-edrendű projektív sík, melynek 57 pontja és egyenesre van, bármely pont 8 egyenesre illeszkedik, valamint bármely egyenesnek 8 pontja van. Projektív sík

esetén bármely két egyenesnek pontosan egy közös pontja van és bármely két pontra pontosan egy egyenes illeszkedik. Így, ha a kártyákat tekintjük a pontoknak és a szimbólumokat az egyeneseknek, akkor megkapjuk a játék felépítését. Felmerül a kérdés, hogy ha 57 pontja van, akkor miért 55 kártyából áll a pakli. Valójában lehetne 57 kártyát készíteni, tehát az eredeti játék még kiegészíthető úgy két kártyával, hogy a játék továbbra is „működjön”. *Metsch* könyvéből [19, 5.1. Lemma] tudjuk, ha adott $n^2 + n + 1$ egyenes és $v \geq n^2$ pont a megfelelő kapcsolattal, akkor kiegészíthető n -edrendű projektív síkká. A kevesebb kártyának az oka valószínűleg, hogy az 55 lapos kártyapaklik megszokottabbak nyomtatásnál, hiszen a francia kártya is 55 lapból áll. Így ez a játék a jelölésünkkel egy $(8, 2, 1)^{55}$ -játék.

Kisebbség számára elérhető a *Dobble Kids* és a *Spot it Jr!* (illetve egyéb utánzatok). Ezeknél egy kártyán csak 6 kép van, az előbbi 30 kártyából áll, az utóbbi 31-ből. Ebben az esetben az 5-ödrendű projektív sík tulajdonságait használták fel. Ennek 31 pontja és egyenese van, egy pont 6 egyenesre illeszkedik és egy egyenesnek 6 pontja van. Vagyis a *Dobble Kids* egy $(6, 2, 1)_{31}^{30}$ -játék, a *Spot it Jr!* pedig $(6, 2, 1)_{31}^{31}$ -játék. [7][25]

1.2. Møbee

A *Møbee* nevű játékot egy magyar matematikus, *Ruff János* alkotta meg. Ennek hátterében a véges Möbius-sík áll, ezáltal bármely 3 kártyát véve, pontosan egy közös szimbólumot találunk. Vagyis itt $(r, 3, 1)$ -játékokról van szó, kérdés, mik lehetnek a további paraméterek. A játéknak 3 különböző játékmódja van, de itt is a lényeg, hogy minél gyorsabban megtaláljuk a közös szimbólumot 3 kártyán. A játék 4 kártyapaklit tartalmaz, 4 különböző nehézségi szinthez. Ahogy haladunk a szinteken egyre kevésbé lesz pörgős a játék, mint a *Dobble*, egyre többet kell gondolkodni.

Az első szinten 7 szimbólum van egy kártyán, ami kilóg a sorból, hiszen ilyen Möbius-sík nem létezik. Ez egy $(7, 3, 1)_{14}^8$ -játék. A második pakli egy $(12, 3, 1)_{30}^{10}$ -játék, a harmadik $(20, 3, 1)_{58}^{17}$ -játék és végül a negyedik $(30, 3, 1)_{130}^{53}$ -játék. Láthatjuk, hogy a szimbólumok száma elég gyorsan nő a kártyák számához képest. [20]

A Möbius-sík egy olyan struktúra, mely a körök geometriai tulajdonságaival rendelkezik. Pontokból, körökből áll, és az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik: bármely 3 különböző pontjához pontosan 1 kör illeszkedik; egyértelműen létezik adott kört adott pontjában érintő és egy másik adott ponton átmenő kör; és létezik 4 olyan pont, amelyek nincsenek egy körön.

Tehát ebben az esetben ismét a kártyák szimbolizálják a pontokat és a körök a szimbólumokat. Ekkor teljesül az, hogy bármely 3 kártyát vesszük, egyértelműen létezik olyan kör, amely tartalmazza ezeket, azaz lesz pontosan 1 szimbólum, amely mindhárom kártyán látható. Valójában ez a rendszer miatt fontos, hogy a pontokkal azonosítsuk a kártyákat. Kényelmesebbnek tűnik, hogy legyenek a kártyák a blokkok és a szimbólumok a pontok, azaz egy kártyára azok

a szimbólumok kerülnek, amely pontok illeszkednek az adott blokkhoz. Ez a Dobble és a következő Gemini játéknál működne, mert azok szimmetrikus struktúrára épülnek, azonban a Möbee nem. A Möbius-sík duálisát kell vennünk, amit később részletesebben definiálok, de röviden annyit jelent, hogy a pontok és körök szerepét felcseréljük, így kapjuk meg azt a struktúrát, amire szükségünk van a játékhoz. Így ha a pont-kártya és blokk-szimbólum azonosítást veszem alapul, akkor bármelyik itt tárgyalt rendszerre működni fog a játék konstrukciója.

1.3. Gemini

A harmadik kártyapakli amivel foglalkozom, tudásom szerint nem létezett eddig. A *Gemini* nevet kapta, mert bármely 2 kártyát véve 2 azonos szimbólum található. Ezáltal új játékmódok találhatóak ki, valamint az oktatásban is további feladat variációkat alkalmazhatunk.

Ennek a koncepciónak a háttérében a bisíkok állnak. A bisíkok pontokból és blokkokból állnak a projektív síkokhoz hasonlóan (ott a blokkokat egyeneseknek neveztük), azonban itt bármely 2 blokknak 2 közös pontja van és bármely 2 pont pontosan 2 blokkban van benne. Hasonlóan itt is a kártyákat tekintjük a pontoknak és a szimbólumokat a blokkoknak.

A projektív síkokhoz képest jóval kevesebb információnk van a bisíkok létezéséről. Kisebb rendű bisíkokból többet ismerünk, de később látjuk majd, hogy ezeknél a kártyák száma meglehetősen kevés lenne, ezért játékkészítéshez nem mind alkalmasak. Így háromféle pakli elkészítését láttam hasznosnak. A 7-edrendű bisíknak 37 pontja és blokkja van, és minden blokk 9 pontból áll. Ebben az esetben a pakli 37 kártyát tartalmaz, melyeken 9 szimbólum van. Így ez egy $(9, 2, 2)_{37}^{37}$ -játék. A 9-edrendű esetén 56 kártyát tudunk készíteni, mindegyiken 11 szimbólummal, vagyis $(11, 2, 2)_{56}^{56}$ -játék. Végül a $(13, 2, 2)_{79}^{79}$ -játékot a 11-edrendű bisíkkal kapjuk, melyben 79 kártya van.

2. A t -rendszerek

Ahhoz, hogy a fent említett projektív síkokat, bisíkokat és Möbius-síkokat létre tudjuk hozni és ezekből kártyajátékot készítsünk, meg kell ismerkednünk az *illeszkedési struktúrákkal*, *t-rendszerekkel*, és a számunkra legfontosabb *blokkrendszerekkel*, azon belül is a négyzetes struktúrákkal. Ebben a fejezetben ismertetem ezeknek a definícióit és néhány tételt, amellyel közelebb kerülünk ahhoz, hogy mi magunk is meg tudjuk konstruálni ezeket a rendszereket.

A fejezet *Szónyi* jegyzetének [26] 1.2., 3., 4.1., 5. és 6.1. fejezetek felépítését követi, azonban néhol jelölésben eltértem ettől az egységesség és könnyebb megérthetőség érdekében.

2.1. Illeszkedési struktúrák

2.1.1. Definíció. [26, 1.2.1. definíció]

Egy $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ hármast *illeszkedési struktúrának* nevezünk, ahol \mathbf{P} és \mathbf{B} diszjunkt halmaz, I pedig egy \mathbf{P} és \mathbf{B} közötti reláció. \mathbf{P} elemeit *pontoknak*, \mathbf{B} elemeit *blokkoknak*, az I relációt pedig *illeszkedési relációnak* nevezzük.

A pIB jelölés jelentse, hogy p pont illeszkedik a B blokkra.

A játék esetében oda szeretnék eljutni, hogy a pontok azonosítsák a kártyákat és a blokkok a kártyákon szereplő szimbólumokat, azaz egy kártyán azok a szimbólumok szerepelnek, amely blokkok tartalmazzák az adott pontot. Tehát célom, hogy a blokkokat az általa tartalmazott pontokkal lehessen azonosítani. Ehhez szükség lesz az alábbi fogalmakra.

2.1.2. Definíció. [26, 1.2.2. definíció]

Vegyünk két illeszkedési struktúrát, legyenek $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ és $\mathbf{D}' = (\mathbf{P}', \mathbf{B}', I')$. Az $\alpha : \mathbf{P} \cup \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{P}' \cup \mathbf{B}'$ leképezés *izomorfizmus*, ha bijekció és

$$\mathbf{P}^\alpha = \mathbf{P}', \mathbf{B}^\alpha = \mathbf{B}', pIB \Leftrightarrow p^\alpha I' B^\alpha, \forall p \in \mathbf{P}, \forall B \in \mathbf{B}.$$

Ha teljesül, α -t *izomorfizmusnak* nevezzük, valamint \mathbf{D} és \mathbf{D}' *izomorf*. Ha $\mathbf{D} = \mathbf{D}'$, akkor α -t *automorfizmusnak* hívjuk.

2.1.3. Definíció. [26, 1.2.3. definíció]

A $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ illeszkedési struktúra *duálisa* a $\mathbf{D}^* = (\mathbf{P}^*, \mathbf{B}^*, I^*)$ rendszer, ahol $\mathbf{P}^* = \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^* = \mathbf{P}$ és I^* az I reláció inverze.

Ha egy illeszkedési struktúrában nem fordul elő olyan, hogy két különböző blokkhoz pontosan ugyanazok a pontok illeszkednek, akkor *egyszerű illeszkedési struktúrának* nevezzük. Ekkor a

blokkok azonosíthatók a rájuk illeszkedő pontokkal, így a blokkok a pontok bizonyos részalmazai, az I reláció pedig a tartalmazás. Vagyis a $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ egyszerű illeszkedési struktúra izomorf a $\mathbf{D}' = (\mathbf{P}, \mathbf{B}', \in)$ struktúrával, ahol $\mathbf{B}' = \{\{p : pIB\} : B \in \mathbf{B}\}$. Innentől ilyen struktúrákkal foglalkozom, így a pIB jelölés helyett a $p \in B$ jelölést használom. Egy struktúra duálisa pontosan akkor lesz egyszerű, ha az eredetiben nem volt két olyan pont, amelyek ugyanazokhoz a blokkokhoz illeszkednek.

2.1.4. Definíció. [26, 1.2.4. definíció]

Egy $p \in \mathbf{P}$ pont *foka* a p -hez illeszkedő blokkok száma, azaz

$$\deg(p) = |\{B \in \mathbf{B} : pIB\}|$$

Egy $B \in \mathbf{B}$ blokk *foka* a hozzá illeszkedő pontok száma, azaz

$$\deg(B) = |\{p \in \mathbf{P} : pIB\}|$$

2.1.5. Definíció. [26, 1.2.5. definíció alapján]

Egy egyszerű illeszkedési struktúrát *r-regulárisnak* nevezünk, ha minden pont foka r és *k-uniformnak*, ha minden blokk foka k .

Ha a kártyákra gondolunk, akkor természetesen egyszerű illeszkedési struktúrára van szükségünk, hiszen különben lennének olyan szimbólumok, amelyek pontosan ugyanazokra a kártyákra kerülnének rá. Az is megfigyelhető, hogy minden kártyán ugyanannyi szimbólum van és minden szimbólum ugyanannyi kártyán szerepel, azaz reguláris és uniform struktúra. A Dobble esetében például 8-reguláris és 8-uniform egyszerű illeszkedési struktúrát használunk.

A blokkok és pontok kapcsolatát leírhatjuk mátrixok segítségével, ezáltal könnyebben szemléltethető a struktúra és a játékkészítésnél is jól felhasználható. A kártyagenerátoromban én is hasonló módon tárolom a kártyákra kerülő szimbólumokat.

2.1.6. Definíció. [26, 1.2.7. definíció]

Legyen $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ véges illeszkedési struktúra, pontjai: p_1, \dots, p_v , blokkjai: B_1, \dots, B_b .

\mathbf{D} illeszkedési mátrixa $M = (m_{p_i, B_j})$ ($i = 1, \dots, v$, $j = 1, \dots, b$) mátrix, ahol

$$m_{p_i, B_j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } p_i \in B_j \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

\mathbf{D} szomszédsági mátrixa $A = (a_{p_i, p_j})$ ($i, j = 1, \dots, v$) mátrix, ahol

$$a_{p_i, p_j} = |\{B \mid p_i \in B \wedge p_j \in B\}|.$$

Tehát az M mátrix m_{p_i, B_j} mezője pontosan, akkor 1, ha az i . pont illeszkedik a j . blokkhoz. A szomszédsági mátrix a_{p_i, p_j} mezője pedig a $\{p_i, p_j\}$ -re illeszkedő blokkok száma, így a főátlóban éppen a pontok foka áll, vagyis $\deg(p_i)$.

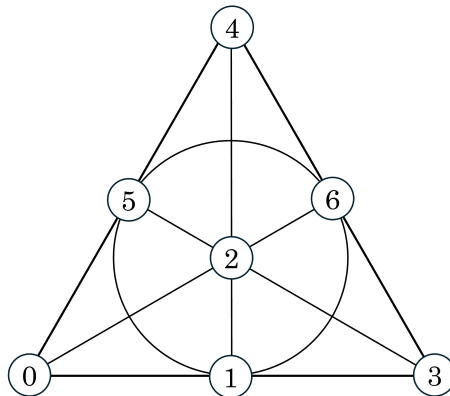
2.1.7. Állítás. $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ véges illeszkedési struktúra illeszkedési és szomszédsági mátrixára teljesül, hogy $A = MM^T$.

BIZONYÍTÁS. Tetszőleges $p, q \in \mathbf{P}$ pontokra $m_{p, B} = m_{q, B} = 1$ pontosan akkor teljesül, ha B blokkra illeszkedik p és q is. Így az M_p és M_q^T vektorok szorzata éppen a rájuk illeszkedő blokkok száma. ■

A duális struktúra illeszkedési mátrixa M^T , hiszen a pontok és blokkok szerepe felcserélődik. A fenti állítás alapján a szomszédsági mátrixa $M^T M$, amelynek mezőin éppen az eredeti struktúra blokkjainak metszete áll, ezért nevezhetjük *blokk szomszédsági mátrix*nak.

2.1.8. Példa. Legyen $\mathbf{P} = \{0, \dots, 6\}$,

$\mathbf{B} = \{\{0, 1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 0\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 0, 2\}\}$. Ezt az illeszkedési struktúrát nevezzük Fano-síknak és az alábbi ábrán látható az ismert ábrázolása.



1. ábra. Fano-sík [26, 1.2. ábra alapján]

Illeszkedési mátrixának m_{p_i, B_j} eleme 1, ha $p_i \in B_j$, különben 0. Tehát például $m_{0, \{0, 1, 3\}} = 1$, mert $0 \in \{0, 1, 3\}$. Így folytatva megkapjuk a Fano-sík egy illeszkedési mátrixát, melyben az oszlopokat indexelő blokkok sorrendje a fenti \mathbf{B} halmaz leírásában látott sorrend.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Minden pont 3 blokkhoz illeszkedik, így a szomszédsági mátrix főátlójában mindenhol 3 szerepel, továbbá bármely 2 különböző pont pontosan 1 blokkhoz illeszkedik, így minden más eleme a mátrixnak 1 lesz.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.1.9. Lemma. [26, 1.2.9. lemma]

Tetszőleges $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ illeszkedési struktúrában

$$\sum_{p \in \mathbf{P}} \deg(p) = \sum_{B \in \mathbf{B}} \deg(B)$$

BIZONYÍTÁS. Számoljuk meg kétféleképpen a $(p, B) \in I$ párokat, azaz az összes pIB illeszkedést. Legyenek a pontok p_1, \dots, p_v és a blokkok B_1, \dots, B_b , valamint $i = \{1, \dots, v\}$, $j = \{1, \dots, b\}$. Tekintsük a párokat a pontok alapján, ekkor a (p_1, B_j) alakú párokból éppen annyi van, ahány blokkra illeszkedik a p_1 pont, azaz pontosan $\deg(p_1)$ pár van. Hasonlóan (p_2, B_j) párokból $\deg(p_2)$ darab van és így tovább folytatva megkapjuk, hogy az összes pár száma:

$$\deg(p_1) + \deg(p_2) + \dots + \deg(p_v) = \sum_{p \in \mathbf{P}} \deg(p).$$

Ugyanígy összeszámolhatjuk a blokkok alapján az összes párt. (p_i, B_1) alakú párból, pontosan annyi van, ahány pont illeszkedik a B_1 blokkra, azaz $\deg(B_1)$. Ezt alkalmazva a b darab blokkra, megkapjuk az összes párt:

$$\deg(B_1) + \deg(B_2) + \dots + \deg(B_b) = \sum_{B \in \mathbf{B}} \deg(B).$$

Ebből pedig következik az állítás. ■

Ha tekintünk egy r -reguláris, k -uniform, v pontú, b blokkszámú illeszkedési struktúrát, akkor a fokok összege:

$$\sum_{p \in \mathbf{P}} \deg(p) = vr, \quad \sum_{B \in \mathbf{B}} \deg(B) = bk.$$

Az előző lemmát felhasználva egy hasznos összefüggést kapunk a paraméterekre.

2.1.10. Következmény. [26, 1.2.10. korollárium]

Egy r -reguláris, k -uniform, v pontú, b blokkszámú illeszkedési struktúrában $vr = bk$.

2.1.11. Definíció. [26, 1.2.14. definíció]

Azokat az illeszkedési struktúrákat, amelyekben a pontok száma azonos a blokkok számával, *négyzetesnek* vagy *szimmetrikusnak* nevezzük.

A Dobble és a Gemini játékok esetében négyzetes az illeszkedési struktúránk, ezért cserélhető fel a pontok és blokkok szerepe. Tehát, ahogy korábban már említettem, akár úgy is definiálhatnánk ezeket a játékokat, hogy egy kártya egy blokkot szimbolizál, és azok a szimbólumok vannak rajta, amelyeket a blokk pontjaival azonosítunk.

A négyzetes dizájnok létezéséről korlátozott a tudásunk, $\lambda = 1$ -re a projektív síkokat fogjuk kapni, $\lambda = 2$ -re a bisíkokat, amelyekről csak sejtés, hogy véges sok létezik. Szintén egy sejtés, hogy $\lambda > 1$ -re véges sok négyzetes dizájn létezik. [4, II.6.13 Conjecture]

2.2. t -rendszerek

A kártyáknál egy fontos tulajdonsággal még nem foglalkoztam, hogy bármely 2, vagy a Møbee esetén 3 kártyát tekintve ugyanannyi azonos szimbólum látható. Ez azt jelenti, hogy bármely 2 vagy 3 pont mindig ugyanannyi blokkhoz illeszkedik. Ilyen tulajdonsággal rendelkeznek a t -rendszerek.

2.2.12. Definíció. [26, 5.1.1. definíció]

A $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ egyszerű illeszkedési struktúrát $t - (v, k, \lambda)$ -rendszernek nevezzük, ahol $v > k > 1$, $k \geq t \geq 1$, ha v pontja van, k -uniform és bármely t pont pontosan λ blokkban van benne. Ha \mathbf{D} nem egyszerű, azaz lehetnek többszörös blokkok, akkor $t - (v, k, \lambda)$ -struktúrának nevezzük.

2.2.13. Állítás. [26, 5.1.2. állítás]

Legyen \mathbf{D} $t - (v, k, \lambda)$ -rendszer. Ekkor a

$$\lambda_i = \lambda \frac{\binom{v-i}{t-i}}{\binom{k-i}{t-i}}$$

az i darab ponton átmenő blokkok számát adja meg minden $i = 0, 1, \dots, t$ -re.

Megjegyzés. Ha $i = 0$, akkor $\lambda_0 = b$, vagyis éppen a blokkok számát, ha $i = 1$, akkor $\lambda_1 = r$, azaz a pontok fokát adja.

BIZONYÍTÁS. Vegyük a \mathbf{P} egy tetszőleges i elemű X részhalmazát, az ezeken átmenő blokkok számát keressük. Egészítsük ki ezt a halmazt t eleművé, vagyis vegyünk mellé még $t - i$ darab pontot. Ekkor ezeken a pontokon λ blokk megy át. A $t - i$ pontot összesen $\binom{v-i}{t-i}$ féleképpen választhattuk. Vagyis ezzel azt kapjuk, hogy az X halmaz pontjain $\lambda \binom{v-i}{t-i}$ blokk megy át, de ekkor egy blokkot többször számoltunk. Egy tetszőleges blokkban az X elemein kívül $k - i$ pont van, hiszen minden blokk foka k . A $k - i$ pontból $t - i$ darabot veszünk az X halmaz elemeihez. Tehát minden blokkot $\binom{k-i}{t-i}$ -szer számoltunk. Így bármely i ponton $\lambda \frac{\binom{v-i}{t-i}}{\binom{k-i}{t-i}}$ blokk megy át. ■

Ez a játék esetén azt jelenti, hogy ha van egy (r, t, λ) -játékunk, azaz bármely t kártyán λ közös szimbólum, akkor ha $i < t$ -nél kártyát veszünk, akkor éppen λ_i közös szimbólum lesz. Például érdekes lehet, hogy a $M\emptyset$ bee esetén, hány közös szimbólumot találhatunk, amikor 2 kártyát csapunk fel. A $t = 3$ és $\lambda = 1$ mindegyik pakli esetén. A második pakliban $v = 12$, $k = 4$, így $\lambda_2 = 4$, azaz 2 kártya esetén 4 közös szimbólumot láthatunk. A harmadik pakliban 6 azonos szimbólum van 2 kártyán és a negyedikben 7.

A következő tétel megmutatja, hogy ha nem kötjük ki az egyszerűséget, akkor megfelelő paraméterekre mindig létezik ilyen t -struktúra. Ez azt jelentené, hogy egy kártyán többször is szerepelhet ugyanaz a szimbólum.

2.2.14. Tétel. [26, 5.1.4. tétel]

Tegyük fel, hogy $t < k < v - t$. Ekkor alkalmas λ -ra létezik olyan $t - (v, k, \lambda)$ -struktúra, amelyben nem minden k pontú ponthalmaz blokk.

BIZONYÍTÁS. Legyen C az a mátrix, melynek sorai a \mathbf{P} t elemű részhalmazai (T_i), oszlopai a k elemű részhalmazai (K_j) és $c_{ij} = 1$, ha $T_i \subseteq K_j$, különben 0. Tehát a mátrixnak $\binom{v}{t}$ sora és $\binom{v}{k}$ oszlopa van és mivel $t < k < v - t \Rightarrow \binom{v}{t} < \binom{v}{k}$, így a mátrix oszlopai lineárisan összefüggők. Emiatt létezik olyan egész koordinátájú \mathbf{x} vektor, melyre $M\mathbf{x} = 0$ (mert létezik racionális koordinátájú, ha megszorozzuk a koordináták közös nevezőjével, egész koordinátákat kapunk). Tegyük fel, hogy \mathbf{x} legkisebb koordinátája $-a$, ahol $a > 0$ és legyen \mathbf{j} a csupa egyesből álló $\binom{v}{k}$ hosszú vektor. Ekkor az $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + a\mathbf{j}$ vektor minden eleme nemnegatív és van olyan koordinátája, mely 0. Továbbá

$$M\mathbf{x}' = M(\mathbf{x} + a\mathbf{j}) = M\mathbf{x} + Ma\mathbf{j} = Ma\mathbf{j} = a \begin{pmatrix} v-t \\ v-k \end{pmatrix} \mathbf{j},$$

hiszen $M\mathbf{j}$ vektor i . eleme éppen azt adja meg, hány k -as részhalmaz van, amely tartalmazza T_i -t. Az egyenlet pedig azt fejezi ki, hogy ha vesszük azon k elemű K_i halmazokat, melyekre a $\mathbf{x}'_{K_i} \neq 0$, multiplicitása éppen \mathbf{x}'_{K_i} , akkor egy tetszőleges t elemű részhalmaz $a \binom{v-t}{k-t}$ ilyen k -as halmazban van benne. Tehát legyen $\lambda = a \binom{v-t}{v-k}$, ekkor azon K_j halmazok nem lesznek blokkok, melyekre $\mathbf{x}'_{K_j} = 0$. ■

Ha nem engedünk többszörös blokkokat, azaz a $t - (v, k, \lambda)$ -rendszerek esetén már nem ilyen egyszerű a létezését megmutatni. Sokáig csak $t = 5$ -re volt ismert ilyen rendszer létezése, és azt sejtették, hogy 6-rendszerek nincsenek. Később megszületett egy tétel, amely bizonyítja, hogy bármely t -re léteznek $t - (v, k, \lambda)$ -rendszerek. A következő tételket nem bizonyítom, mert meghaladja a dolgozat kereteit és terjedelmét.

2.2.15. Tétel. (Teirlinck tétele) [26, 5.1.5. tétel]

Adott t -re definiáljuk μ -t, ahol $[\]$ jelölje a legkisebb közös többszöröst.

$$\mu = \prod_{i=1}^t \left(\left[\left\{ \binom{i}{n} : n = 1, \dots, i \right\} \cdot \{1, \dots, i + 1\} \right] \right)$$

Ekkor bármely $v \equiv t \pmod{\mu}$ -re az X v -elemű alaphalmaz $(t + 1)$ -elemű részhalmazait $t - (v, t + 1, \mu)$ -rendszerekre particionálhatjuk. Speciálisan, $t - (v, t + 1, \mu)$ -rendszerek léteznek $v \equiv t \pmod{\mu}$, $\lambda \equiv 0 \pmod{\mu}$, és $v > \lambda + t$ esetén.

A Fisher-egyenlőtlenség a blokkok és pontok száma közötti összefüggésekkel foglalkozik, a következő tétel a t -rendszerekre vonatkozó Fisher-egyenlőtlenség.

2.2.16. Tétel. [26, 5.1.6. tétel]

Legyen \mathbf{D} $t - (v, k, \lambda)$ -rendszer, ahol $t = 2s$ és $k \leq v - s$. Ekkor $b \geq \binom{v}{s}$.

A bizonyítás megtalálható Szőnyi jegyzetében [26].

A kártyajátékoknál a rendszerek duálisára lesz szükségünk, a következő tételben megkapjuk a duális eredményt is.

2.2.17. Tétel. (Ray-Chaudhuri, Wilson) [26, 5.1.7. tétel]

Legyen $s \leq k \leq v - s$ és legyen \mathbf{B} egy v pontú halmaz k elemű részhalmazainak családja, melyre $|B \cap B'|$ legfeljebb s értéket vesz fel, ha $B \neq B' \in \mathbf{B}$. Ekkor $\mathbf{B} \leq \binom{v}{s}$.

Bizonyítása megtalálható Babai és Frankl könyvében[2, Theorem 5.35.].








2.3. Játék t -rendszerekből

Most már tudjuk mik azok a t -rendszerek és azt is, hogy ezekből készíthetünk különböző kártyajátékokat, de a leglényegesebb kérdésre még nincsen válaszunk: hogyan?

Tekintsünk egy $t - (v, k, \lambda)$ -rendszert, mely r -reguláris, hiszen azt szeretnénk, ha minden

kártyán ugyanannyi szimbólum lenne. Továbbá legyen a rendszer illeszkedési mátrixa M . Ekkor nézzük, hogyan kapjuk meg az $(r, t, \lambda)_k^v$ -játékot. A pontokat tekintjük a kártyáknak, és a blokkokat a szimbólumoknak. Vagyis ha veszünk egy pontot, akkor a neki megfelelő kártyára azok a szimbólumok kerülnek, amely blokkokhoz illeszkedik a pont. Ezt az M mátrixról könnyen leolvashatjuk, minden sor egy pontot jelöl, és amely mezőn 1-es van ahhoz a blokkhoz illeszkedik, vagyis a blokkhoz rendelt szimbólum rákerül a kártyára. Ha így nézzük, akkor az M mátrixra úgy is gondolhatunk, hogy minden sor egy kártya és minden oszlop egy szimbólum. Ahol 1-es van, ott a kártyára rákerül a szimbólum, ahol 0 ott nem.

2.3.18. Példa. Nézzük a korábban látott Fano-síkot, mely egy $(7, 3, 1)$ -blokkrendszer, vagyis a $(3, 2, 1)_7^7$ -játékot szeretnénk elkészíteni. A kártyákat sorszámozom 1-től 7-ig, a szimbólumok pedig legyenek például gyümölcsök [15]. Ekkor a korábban felírt M mátrix sorait, oszlopaikat jelölöm a neki megfeleltetett sorszámokkal, illetve szimbólumokkal.

							
1.	1	0	0	0	1	0	1
2.	1	1	0	0	0	1	0
3.	0	1	1	0	0	0	1
4.	1	0	1	1	0	0	0
5.	0	1	0	1	1	0	0
6.	0	0	1	0	1	1	0
7.	0	0	0	1	0	1	1

Ebben az esetben a kártyák így fognak kinézni:



2. ábra. Gyümölcsös kártyapakli $k = 3$ -mal

2.4. Blokkrendszerek

Áttérek egy struktúrára, amellyel az igazán szép, szimmetrikus játékok készíthetők. *Blokkrendszerek*nek nevezzük azokat a t -rendszereket, ahol $t = 2$. Tehát a (v, k, λ) -blokkrendszernek v pontja van, k -uniform és bármely 2 különböző pontjára λ blokk illeszkedik. A Dobble és Gemini játékoknál éppen erre van szükségünk, hogy bármely 2 kártyán $\lambda = 1$ azonos szimbólum legyen.

Már a t -rendszereknél is láthattuk a 2.2.13. állításból, hogy a struktúra r -reguláris és azt is, hogyan kapjuk meg a blokkok számát, de most a blokkrendszerekre igazolom az állítást.

2.4.19. Állítás. [26, 3.1.2. állítás]

A (v, k, λ) -blokkrendszerben minden pont foka

$$r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1},$$

a blokkok száma pedig

$$b = \frac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)}.$$

BIZONYÍTÁS. Tekintsünk egy tetszőleges p pontot és számoljuk meg kétféleképpen azon (q, B) párokat, ahol $p \neq q$ és $p \in B$.

Egyrészt p -n kívül $v-1$ pont van és $\{p, q\}$ pontosan λ blokkban vannak benne definíció szerint, tehát $(v-1)\lambda$ párt kapunk.

Másrészt B k -uniform rendszer, azaz $k-1$ eleme van p -n kívül és p pontosan $\deg(p)$ blokkban van benne, tehát összesen $\deg(p)(k-1)$ pár van.

Így azt kapjuk, hogy $\lambda(v-1) = \deg(p)(k-1)$, amit átrendezve megkapjuk egy tetszőleges p pont fokát:

$$r = \deg(p) = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}.$$

A 2.1.10. következményből megkapjuk a b -re vonatkozó képletet is:

$$bk = vr \implies bk = \frac{\lambda v(v-1)}{k-1} \implies b = \frac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)}. \quad \blacksquare$$

Az r és b természetesen pozitív egész számok, így a fenti állításból következik:

2.4.20. Következmény. [26, 3.1.3. korollárium]

(v, k, λ) -blokkrendszer létezéséhez szükséges, hogy

- $\lambda(v - 1) \equiv 0 \pmod{k - 1}$,
- $\lambda v(v - 1) \equiv 0 \pmod{k(k - 1)}$.

A Dobble esetében $\lambda = 1$, vagyis $(v, k, 1)$ -blokkrendszer, ezeket *Steiner k -asrendszereknek* nevezzük. A játékban k azt jelöli, hogy egy szimbólum hány kártyán szerepel, v pedig, hogy hány kártyánk van. Számunkra a legfontosabb kérdés, hogy milyen k és v értékekre létezik Steiner-rendszer.

Vizsgáljuk először a $k = 3$ esetet, azaz a $(v, 3, 1)$ -blokkrendszereket. A 2.4.20. következményt alkalmazva, behelyettesítés után azt kapjuk, hogy $v \equiv 1 \pmod{2}$ és $v(v - 1) \equiv 0 \pmod{6}$. Tehát Steiner hármasrendszer a $v \equiv 1$ vagy $v \equiv 3 \pmod{6}$ esetben létezhet. Ismert néhány konstrukció, melyek megmutatják, hogy bármely, a feltételnek megfelelő v -re létezik ilyen rendszer [26, 3.1. fejezet]. A korábban látott Fano-sík $v = 7$ -re az egyetlen Steiner hármasrendszer.

Nézzük, hogyan alakulnak a paraméterek, ha Dobble-típusú játékot szeretnénk alkotni Steiner hármasrendszerből. A 2.4.19. állítás alapján $r = \frac{v-1}{2}$ és $b = \frac{v(v-1)}{6}$. Ezek alapján az alábbi táblázatban összefoglalom a paramétereket, amelyekkel kártyapakli készíthető. Bármely szimbólum 3 kártyán szerepel, bármely 2 kártyát véve pontosan 1 azonos szimbólum látható, v a kártyák száma, r a szimbólumok száma egy kártyán és b az összes szimbólum száma.

v	r	b
3	1	1
7	3	7
9	4	12
13	6	26
15	7	35
19	9	57

Nagyobb k -ra már kevesebb egyszerű konstrukció ismert, $k = 4$ és $k = 5$ esetben minden a 2.4.20. következménynek megfelelő v -re létezik rendszer, azonban $k = 6$ -ra már nem tudjuk, hogy minden megfelelő v -re létezik-e. [26, 3.1. fejezet]

Láthattuk, hogy a Steiner-rendszerekből is lehet játékot készíteni, azonban a szimbólumok száma egy kártyán viszonylag gyorsan nő, az elkészíthető lapok száma viszont lassan. Így még nem érződik tökéletesnek a játék alapjául választott rendszer.

Nézzünk egy másik ismert rendszert, a $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ -blokkrendszert. Ezt *n -edrendű projektív sík*nak nevezzük és ez már rendelkezik azokkal a tulajdonságokkal, melyek még hiányoztak. Tekintsük át a paramétereket ebben az esetben, felhasználva a 2.4.19. állítást.

$$v = n^2 + n + 1$$

$$k = n + 1$$

$$\lambda = 1$$

$$r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1} = \frac{n^2+n}{n} = n+1$$

$$b = \frac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)} = \frac{(n^2+n+1)(n^2+n)}{(n+1)n} = n^2+n+1$$

Tehát a projektív síkok négyzetes blokkrendszerek és pontosan akkor r -reguláris, ha r -uniform. A Dobble játékban ezeket a struktúrákat használjuk. Az eredeti Dobble egy $(57, 8, 1)$ -blokkrendszerre, azaz 7-edrendű projektív síkra épül, a kisebbeknek való Dobble Kids változat pedig $(31, 6, 1)$ -blokkrendszerre, vagyis 5-ödrendű projektív síkra.

A $\lambda > 1$ esetben jelentősen kevesebb ismeretünk van a blokkrendszerekről. Kevés konstrukció ismert, a létezésükről pedig az alábbi tétel nyújtja a legtöbb információt.

2.4.21. Tétel. (Wilson) [26, 3.1.13. tétel]

Legyen k és λ rögzített, és legyen v a 2.4.20. következmény feltételeinek eleget tevő tetszőleges. Ekkor van olyan v_0 , hogy $v > v_0$ -ra létezik (v, k, λ) -blokkrendszer.

A tétel bizonyítása meghaladja a dolgozat kereteit, megtalálható Beth, Jungnickel, Lenz könyvében [3, VII.8.3 Proof]. További összefüggést ad blokkrendszerek paramétereire a következő tétel, mely a Fisher-egyenlőtlenség blokkrendszerekre vonatkozó változata.

2.4.22. Tétel. (Fisher-egyenlőtlenség) [26, 4.1.1. tétel]

Ha egy blokkrendszerben $k < v$, akkor $b \geq v$.

BIZONYÍTÁS. Vegyünk egy n elemű $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ alaphalmazt, melynek B_1, B_2, \dots, B_k részhalmazai. Azt állítom, hogy ha belátjuk, hogy $|B_i \cap B_j| = \lambda > 0$ ($\forall i \neq j$) $\Rightarrow k \leq n$, akkor igazoltuk a tételt. Hiszen ekkor vegyük egy (v, k, λ) -blokkrendszer duálisát, azaz a pontok és blokkok felcserélődnek, így b darab pont lesz, ami éppen az alaphalmaznak felel meg, a v blokk pedig ennek a részhalmazai, és bármely két blokknak λ közös pontja lesz, így a fenti alapján következik, hogy $v \leq b$. Tehát tegyük fel, hogy $|B_i \cap B_j| = \lambda > 0$ ($\forall i \neq j$).

1. eset: $\exists B_i : |B_i| = \lambda$. A feltétel szerint ekkor $\forall j \neq i$ -re $|B_i \cap B_j| = \lambda$ ami csak úgy teljesülhet, ha $B_i \subset B_j$. Ebben az esetben, ha veszünk egy B_i -től és B_j -től különböző B_k blokkot, annak is teljesülnie kell, hogy $|B_j \cap B_k| = \lambda$, amiből viszont következik, hogy $B_j \cap B_k = B_i$. Vagyis a maradék $n - \lambda$ pont, amelyek nincsenek benne B_i -ben, egy-egy B_j

($j \neq i$) blokkhoz illeszkedhetnek. Ez azt jelenti, hogy B_i -n kívül $n - \lambda$ blokk lehet legfeljebb, azaz $k \leq 1 + (n - \lambda) \leq n$, mert $\lambda > 0$.

2. eset: Feltehetjük, hogy $|B_i| > \lambda$ ($\forall i$). Definiáljuk B_i -ből a \underline{b}_i vektort, amely n hosszú és j . koordinátája 1, ha $h_j \in B_i$, különben 0. Ekkor azt állítom, hogy a \underline{b}_i ($i = 1, 2, \dots, k$) vektorok lineárisan függetlenek. Ha ezt belátjuk, akkor abból már következik, hogy $k \leq n$.

Indirekt felteszem, hogy lineárisan összefüggők, vagyis

$$\exists c_1, \dots, c_k : \sum_{i=1}^k c_i \cdot \underline{b}_i = \underline{0}, \text{ ahol nem minden } c_i = 0.$$

A $\underline{b}_i \cdot \underline{b}_j$ skaláris szorzat éppen a $|B_i \cap B_j|$, ami λ , ha $i \neq j$, különben pedig $|B_i| = \lambda + a_i$, valamely $a_i > 0$ -ra. Legyen j fix és az egyenletet szorozzuk meg \underline{b}_j -vel.

$$0 = \sum_{i=1}^k c_i (\underline{b}_i \cdot \underline{b}_j) = \lambda \left(\sum_{i=1}^k c_i \right) + a_j c_j,$$

hiszen a skaláris szorzat minden esetben λ kivéve, ha $i = j$, akkor $\lambda + a_j$. Legyen $C = \sum_{i=1}^k c_i$, ezzel azt kapjuk, hogy $c_j = -\frac{\lambda C}{a_j}$. Ha C pozitív, akkor a c_j negatív a képlet alapján minden j -re, ekkor viszont a c_j -k összege is negatív, ami éppen C , vagyis ellentmondásra jutunk. Ha C negatív, akkor pedig c_j pozitív minden j -re, így az összegük is pozitív, vagyis ismét ellentmondásra jutottunk. Tehát $\sum c_i \cdot \underline{b}_i = \underline{0}$ csak úgy lehet, ha minden $c_i = 0$, ami pedig éppen azt jelenti, hogy a vektorok lineárisan függetlenek. Ezzel beláttuk a tételt. ■

Legyen I a $v \times v$ -s egységmátrix és J a csupa 1-esekből álló $v \times v$ -s mátrix. Valamint tekintsünk egy (v, k, λ) -blokkrendszert, melynek illeszkedési mátrixa M . Ekkor az $A = MM^T$ szomszédsági mátrix főátlójában r -ek szerepelnek, hiszen minden pont foka r , az összes többi mezőn pedig λ , mert bármely két pont λ blokkban van benne. Így a szomszédsági mátrix előáll $A = (r - \lambda)I + \lambda J$ alakban. A következő lemma ennek determinánsára ad képletet.

2.4.23. Lemma. [26, 4.1.2. lemma]

A fent definiált I és J mátrixokkal a $v \times v$ -s mátrixra fennáll:

$$\det(xI + yJ) = (x + yv)x^{v-1}$$

BIZONYÍTÁS. Legyen \mathbf{j} csupa 1-esből álló v elemű oszlopvektor, ez sajátvektora $xI + yJ$ -nek az $x + yv$ sajátértékkel, hiszen $(xI + yJ)\mathbf{j} = (x + yv)\mathbf{j}$. A mátrix szimmetrikus, így van olyan ortonormált bázisa, amely a sajátvektorokból áll. Ami azt jelenti, hogy az összes többi \mathbf{w} sajátvektor merőleges \mathbf{j} -re. Ebben az esetben $\mathbf{w}J = 0$, amiből következik, hogy $\mathbf{w}(xI + yJ) = \mathbf{w}x$. Ami éppen azt jelenti, hogy a többi sajátvektorhoz tartozó sajátérték x . A mátrix determinánsa pedig előáll a sajátértékek szorzataként, vagyis $\det(xI + yJ) = (x + yv)x^{v-1}$. ■

A kapott képletbe behelyettesítve a szomszédsági mátrix $A = (r - \lambda)I + \lambda J$ alakját, azt kapom, hogy $\det((r - \lambda)I + \lambda J) = (r - \lambda + \lambda v)(r - \lambda)^{v-1}$. A 2.4.19. pontok fokára vonatkozó állítás alapján $r(k - 1) = \lambda(v - 1)$, ezt felhasználva a szorzat első tagja egyszerűbb alakra hozható: $r + \lambda(v - 1) = r + r(k - 1) = r(1 + k - 1) = rk$. Tehát $\det(A) = rk(r - \lambda)^{v-1}$.

2.4.24. Következmény. [26, 4.1.3. korollárium]

Ha egy blokkrendszerben $k < v$, akkor a szomszédsági mátrix determinánusa $rk(r - \lambda)^{v-1}$.

Az 2.1.11. definíció alapján egy blokkrendszert négyzetesnek nevezünk, ha $b = v$. A következő tétel összefoglalja a négyzetes blokkrendszerekre vonatkozó összefüggéseket.

2.4.25. Tétel. [26, 4.1.4. tétel]

Ha egy blokkrendszerben $k < v$, akkor a következő állítások ekvivalensek:

1. $b = v$,
2. $r = k$,
3. bármely két blokk λ pontban metszi egymást,
4. bármely két blokk metszete ugyanakkora.

BIZONYÍTÁS. A 2.1.10. következmény alapján $vr = bk$, ebből azonnal következik az 1. és 2. ekvivalenciája.

Ha $r = k$, akkor az M illeszkedési mátrix négyzetes, vagyis $MJ = JM$. Ekkor az M -re és a blokk szomszédsági $M^T M$ mátrixra fennáll, hogy $M(M^T M) = (M^T M)M$, azaz $MM^T M = M^T M M$. Mivel $M^T M$ determinánusa nem 0, így M determinánusa sem lehet 0, azaz van inverze, tehát beszorozhatom az egyenletet jobbról M^{-1} -zel. Amiből következik, hogy $MM^T = M^T M$, ez éppen azt jelenti, hogy a blokkrendszer duálisa is blokkrendszer, azaz bármely két blokknak λ közös pontja van. Tehát 2. \Rightarrow 3., amiből pedig természetesen következik a 4.

Végül, ha minden blokk metszete ugyanakkora, akkor a duálisa is blokkrendszer. Az eredeti rendszerre alkalmazva a Fisher-egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy $b \geq v$, ha pedig a duálisa, akkor $b \leq v$, vagyis $b = v$. Tehát a 4.-ből következik az 1.

Így bármely két állítás ekvivalens. ■

A 2.4.24. következményben láttuk, hogy ha a blokkrendszer illeszkedési mátrixa M , akkor $\det(MM^T) = rk(r - \lambda)^{v-1}$. Négyzetes blokkrendszer esetén $k = r$, így a determinánusra fennáll, hogy $\det(MM^T) = k^2(k - \lambda)^{v-1}$. Ha felhasználjuk, hogy mátrixnak és transzponáltjának determinánusa megegyezik, megkapjuk, hogy $(\det(M))^2 = k^2(k - \lambda)^{v-1}$.

2.4.26. Következmény. [26, 6.1.1. korollárium]

Ha létezik négyzetes (v, k, λ) -blokkrendszer, akkor $(k - \lambda)^{v-1}$ négyzetszám.

2.4.27. Definíció. [26, 6.1.2. definíció]

Négyzetes (v, k, λ) -blokkrendszerre az $n = (k - \lambda)$ mennyiséget a blokkrendszer *rendjének* nevezzük.

2.4.28. Állítás. [26, 6.1.3. állítás]

A **D** négyzetes (v, k, λ) -blokkrendszerre $4n - 1 \leq v \leq n^2 + n + 1$.

BIZONYÍTÁS. A 2.4.19. állításból tudjuk, hogy $\lambda(v - 1) = r(k - 1)$, ezt átrendezve és $r = k$ -t felhasználva megkapjuk, hogy

$$\begin{aligned} v &= \frac{k(k-1)}{\lambda} + 1 = \frac{(k-\lambda)(k-\lambda-1)}{\lambda} + \frac{2\lambda k}{\lambda} - \frac{\lambda^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda} + 1 = \\ &= \frac{n(n-1)}{\lambda} + 2k - \lambda = \frac{n(n-1)}{\lambda} + 2(k-\lambda) + \lambda = \frac{n(n-1)}{\lambda} + 2n + \lambda \end{aligned}$$

A kapott egyenlőséget λ -val szorozva és átrendezve egy másodfokú egyenletet kapunk λ -ra:

$$\begin{aligned} v &= \frac{n(n-1)}{\lambda} + 2n + \lambda \\ \lambda v &= n(n-1) + 2n\lambda + \lambda^2 \\ 0 &= \lambda^2 + \lambda(2n - v) + n(n-1) \\ \lambda_{1,2} &= \frac{v - 2n \pm \sqrt{(2n - v)^2 - 4n(n-1)}}{2} \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $\lambda \geq 1$, hiszen bármely két pont legalább egy közös blokkra illeszkedik. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} v - 2n \pm \sqrt{(2n - v)^2 - 4n(n-1)} &\geq 2 \\ v - 2n - 2 &\geq \pm \sqrt{(2n - v)^2 - 4n(n-1)} \end{aligned}$$

Négyzetre emelés, zárójelfelbontás és összevonás után:

$$\begin{aligned} 4n^2 + 4 - 4v + 4n &\geq 0 \\ n^2 + n + 1 &\geq v \end{aligned}$$

Ezzel megkaptuk a keresett felső becslést.

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa nemnegatív, hiszen λ pozitív egész szám, azaz megkapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (2n - v)^2 - 4n(n-1) &\geq 0 \\ (2n - v)^2 &\geq 4n(n-1) \\ (v - 2n)^2 &\geq 4n^2 - 4n = (2n - 1)^2 - 1 \\ (v - 2n)^2 &\geq (2n - 1)^2, \end{aligned}$$

hiszen $n > 1$ esetén a két négyzetszám különbsége nagyobb 1-nél. Ha felhasználjuk, hogy $v \geq 2n$ és $2n > 1$, megkapjuk a keresett alsó becslést:

$$|v - 2n| \geq |2n - 1|$$

$$v - 2n \geq 2n - 1$$

$$v \geq 4n - 1$$

■

A következő tétel egy általános szükséges feltételt ad négyzetes blokkrendszerek létezésére. A tétel bizonyítása algebrai fogalmakra épül, megértése a játékkészítés szempontjából nem releváns, így terjedelme miatt nem tárgyalom. Megtalálható Szőnyi jegyzetében [26, 6.1.5. tétel].

2.4.29. Tétel. (Bruck-Ryser-Chowla) [26, 6.1.5. tétel]

Tegyük fel, hogy létezik négyzetes (v, k, λ) -blokkrendszer.

1. *Ha v páros, akkor $n = k - \lambda$ négyzetszám.*
2. *Ha v páratlan, akkor a $z^2 = (k - \lambda)x^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} \lambda y^2$ diofantoszi egyenletnek van nem-triviális egész megoldása.*

3. Projektív síkok

Ebben a fejezetben áttekintem általánosan a projektív síkokat, ismertetek egy konstrukciót, amellyel már tudunk játékot készíteni. (Egy másik konstrukciót is ismertetek az 5. fejezetben.) Végül röviden áttekintem a parciális projektív síkokat, melyek segítségével olyan paraméterekre is tudunk hasonló típusú játékot készíteni, amelyekre projektív síkokkal nem lehet. Ezek kevésbé szimmetrikus játékok lesznek, de oktatási felhasználás és játék szempontjából lényegtelen. A fejezethez felhasználtam Szőnyi jegyzetének [26] 1.1. fejezetét, Colbourn és Dinitz könyvének [4] VII.2.1. fejezetét, Assmus és Key könyvének [1] 3.2. fejezetét, valamint Kiss és Szőnyi könyvének [22] 1. fejezetét.

3.1. Projektív síkok általánosan

3.1.1. Definíció. [26, 1.1.1., 1.1.2. definíciók]

Vegyünk egy Π nemüres halmazt, és egy Λ halmazt, mely a Π bizonyos részhalmazainak halmaza. Π elemeit *pontoknak*, Λ elemeit *egyeneseknek* mondjuk. A (Π, Λ) párt projektív síknak nevezzük, ha teljesül rá az alábbi három axióma:

1. Π bármely két pontjához egy és csak egy olyan egyenes található, amely mindkettőt tartalmazza.
2. Λ bármely két egyeneséhez egy és csak egy olyan pont van Π -ben, amelyet mindkét egyenes tartalmaz.
3. Létezik négy olyan pont Π -ben, amelyek közül semelyik hármát nem tartalmazza egy egyenes.

A projektív sík véges, ha a következő axióma is teljesül:

4. Van olyan Λ -beli egyenes, amely $q + 1$ pontot tartalmaz.

Abban az esetben, ha a 4. axióma is teljesül a projektív síkot *q-adrendűnek* mondjuk és teljesülnek az alábbi tulajdonságok. Ezt a dolgozatban nem bizonyítom, megtalálható Kiss és Szőnyi könyvében [22, 1.7. Tétel].

- minden egyenesnek $q + 1$ pontja van,
- minden pontot $q + 1$ egyenes tartalmaz,

- a pontok és az egyenesek száma $q^2 + q + 1$.

A blokkrendszereknél már láttuk, hogy egy négyzetes $(q^2 + q + 1, q + 1, 1)$ -blokkrendszer éppen egy q -adrendű projektív sík. A négy axiómában, ha felcseréljük a pontokat és egyeneseket ugyanúgy projektív síkot kapunk, valójában az eredetinek a *duálisát*.

3.1.2. Példa. A 2.1.8. példában látott Fano-sík az axióma rendszer jellegzetes modellje. Ebben az esetben $q = 2$, azaz 7 pontból és 7 egyenesből áll. Később a 3.2.4. példában láthatjuk, hogyan épül fel véges test segítségével és hogyan készíthető belőle játék.

A 2.4.29. Bruck-Ryser-Chowla tételt alkalmazzuk a négyzetes $(q^2 + q + 1, q + 1, 1)$ -rendszerekre és vizsgáljuk meg, milyen paraméterekre létezhet. Ha $\lambda = 1$, akkor az $n = k - \lambda = q$. A $v = q^2 + q + 1$ mindig páratlan, hiszen q paritásától függetlenül $q^2 + q$ páros. Vagyis a tételnek csak a 2. részéből kaphatunk eredményeket. Nézzük, hogyan alakul az egyenlet: $z^2 = qx^2 + (-1)^{\frac{q^2+q}{2}}y^2$. A -1 kitevőjét vizsgáljuk meg:

$$\begin{aligned} q \equiv 0 \text{ vagy } 3 \pmod{4} &\Rightarrow \frac{q^2 + q}{2} \text{ páros} \Rightarrow y \text{ együtthatója } +1 \\ q \equiv 1 \text{ vagy } 2 \pmod{4} &\Rightarrow \frac{q^2 + q}{2} \text{ páratlan} \Rightarrow y \text{ együtthatója } -1 \end{aligned}$$

Abban az esetben ha az y együtthatója -1 , akkor az egyenlet alapján q előáll két négyzetszám összegeként. A 6 nem áll elő két négyzetszám összegeként, így nem létezik 6-odrendű projektív sík. A 10 előáll két négyzetszám összegeként, azonban nem létezik 10-edrendű sem. Ezt számítógéppel igazolta *Lam, Thiel és Swiercz* [17]. Ezzel azt is megkaptuk, hogy a Bruck-Ryser-Chowla tétel szükséges, de nem elégséges feltétel.

Összefoglalom táblázatban a lehetséges kártyajátékok paramétereit. Az $n = q$ -adrendű projektív síkkal $r = q + 1$ szimbólum lesz egy kártyán, valamint összesen $v = q^2 + q + 1$ kártya és szimbólum lesz.

n	v	r
1	3	2
2	7	3
3	13	4
4	21	5
5	31	6
7	57	8
8	73	9
9	91	10
11	133	12

A projektív síkokat is leírhatjuk illeszkedési mátrixszal, azaz ha egy pont illeszkedik egy egyenesre, akkor a mátrixba 1-et írunk a megfelelő helyre, különben 0-t. Ezekből a 2.3 alfejezetben látott módszerrel el tudjuk készíteni a kártyajátékunkat.

3.2. Konstrukció véges testtel

A következőkben áttekintem, hogyan lehet véges testből projektív síkot létrehozni. Ezekhez szükségünk van néhány algebrai ismeretre, melyek szerepeltek az algebra előadásokon, így az eredmények többségét az egyetemi algebra jegyzeteimből vettem, de precízebben és sokkal részletesebben megtalálhatóak *Kiss Emil* könyvének [14] 6. fejezetében. A projektív síkok koordinátázásához felhasználtam *Colbourn* és *Dinitz* könyvét [4, VII.2.1.], *Assmus* és *Key* könyvét [1, 3.2.], valamint *Szőnyi* jegyzetét [26, 1.1.].

Egy véges test elemszámáról tudjuk, hogy prímszám és fordítva minden $q = p^h$ prímszámra létezik q elemű test izomorfia erejéig egyértelműen. A $q = p^h$ elemű testet $\text{GF}(q)$ -val jelöljük, amely a *Galois field* elnevezésre utal. Abban az esetben, ha $h = 1$, azaz prímszámú a test, akkor a test a modulo p maradékosztályokból áll, tehát modulo p számolhatunk a testben. A $\text{GF}(p^h)$ egy h dimenziós vektortér $\text{GF}(p)$ felett, ezt a véges test konstruálásánál fogjuk felhasználni.

Mielőtt véges testre megpróbálunk projektív síkot építeni fontos az elején tudatosítani, hogy a konstrukció során absztrakt fogalmakat használunk. El kell rugaszkodni attól, hogy a pontra úgy tekintünk, mint az euklideszi térben egy koordinátákkal egyértelműen megadható „pötty”. A projektív sík pontja lehet bármilyen eleme az alaphalmaznak, lehet egy szám, egy alma, bármi.

Tekintsünk egy 3 dimenziós V vektorteret a $\text{GF}(q)$ véges test felett. Definiáljuk \mathcal{P} és \mathcal{L} halmazokat: $\mathcal{P} = \{1\text{-dimenziós alterek}\}$, $\mathcal{L} = \{2\text{-dimenziós alterek}\}$ és $P \in \mathcal{P}$, $l \in \mathcal{L}$ esetén $P \cap l \Leftrightarrow P \subset l$. Ekkor vizsgáljuk meg teljesülnek-e a 3.1.1. definícióban leírt axiómák $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ -re.

1. Axióma: $(\forall P_1 \neq P_2 \in \mathcal{P}) (\exists! l \in \mathcal{L}) : P_1 \in l, P_2 \in l$

Az $l = \langle P_1, P_2 \rangle$ feszített altér 2-dimenziós, hiszen $P_1 \neq P_2$, így $l \in \mathcal{L}$ és természetesen $P_1 \in l, P_2 \in l$. Ha létezik l' , melyre $P_1 \in l', P_2 \in l'$, akkor $\langle P_1, P_2 \rangle \subseteq l'$, amiből pedig következik, hogy $l = \langle P_1, P_2 \rangle = l'$, vagyis l egyértelmű.

2. Axióma: $(\forall l_1 \neq l_2 \in \mathcal{L}) (\exists! P \in \mathcal{P}) : P \in l_1, P \in l_2$

Legyen $P = l_1 \cap l_2$, ekkor $\langle l_1 \cup l_2 \rangle = V$, tehát a dimenziója 3, így a dimenziótétel alapján

$$\begin{array}{rccccccc} \dim(l_1) & + & \dim(l_2) & = & \dim(l_1 \cup l_2) & - & \dim(l_1 \cap l_2) \\ 2 & + & 2 & = & 3 & - & \dim(l_1 \cap l_2) \end{array}$$

Vagyis $\dim(l_1 \cap l_2) = 1$, tehát $l_1 \cap l_2 = P \in \mathcal{P}$. Vagyis ezzel azt is beláttuk, hogy csak egy ilyen P létezik.

3. Axióma: $\exists P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{P}$, amelyek közül semelyik hármat nem tartalmazza egy $l \in \mathcal{L}$ sem. Legyen $P_1 = \langle(1, 0, 0)\rangle, P_2 = \langle(0, 1, 0)\rangle, P_3 = \langle(0, 0, 1)\rangle, P_4 = \langle(1, 1, 1)\rangle$ (ezek $\text{GF}(2)$ -ben is léteznek). Azt szeretném belátni, hogy semelyik 3 nincs benne egy 2-dimenziós altérben, vagyis $\langle P_i, P_j, P_k \rangle = V$. A P_1, P_2, P_3 -ról tudjuk, hogy bázist alkotnak V -ben, azaz rájuk teljesül. Kéne még, hogy P_4 mellé bármely kettőt választjuk, akkor is bázist kapunk V -ben. Legyen $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, ekkor $P_4 - P_i - P_j = P_k$ vagyis $P_k \in \langle P_i, P_j, P_4 \rangle$ tehát ez is bázis.

Tehát $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ a $\text{GF}(q)$ testre épített projektív sík. Ekkor \mathcal{P} elemeit pontoknak és \mathcal{L} elemeit egyeneseknek nevezzük. Nézzük, hogyan írhatjuk le ezeket. A $P \in \mathcal{P}$ pont a V 1-dimenziós altere, ennek vesszük egy tetszőleges elemét és azzal reprezentáljuk P -t. Vagyis ekkor P -t leírhatjuk az $(x, y, z) \in \{V \setminus (0, 0, 0)\}$ reprezentációval, de ekkor leírhatjuk (x', y', z') -vel is, ha $\exists \lambda : (x, y, z) = (\lambda x', \lambda y', \lambda z')$. Vezessük be a projektív sík pontjainak homogén koordinátáit, legyen $(x : y : z) = \{(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \mid \lambda \in \text{GF}(q) \setminus \{0\}\}$. Ekkor viszont még mindig nem tudjuk egyértelműen megadni a P -t, mert például $(2 : 1 : 0) = (4 : 2 : 0)$. Ahhoz, hogy ezt elkerüljük, normáljuk a homogén koordinátákat, azaz úgy írjuk le a pontokat, hogy mindig az utolsó nem nulla koordináta 1 legyen. Tegyük fel, hogy $x, y \in \text{GF}(q)$, ekkor a pontok az alábbiak lehetnek:

- $(x : y : 1)$, az ilyen pontok száma: q^2
- $(x : 1 : 0)$, az ilyen pontok száma: q
- $(1 : 0 : 0)$, az ilyen pontok száma: 1

Vagyis leírtuk homogén koordinátákkal a $q^2 + q + 1$ darab pontot.

Az \mathcal{L} elemeinek leírásánál hasonlóan járhatunk el. Az $l \in \mathcal{L}$ egy 2-dimenziós altere V -nek, vagyis ezt meghatározzák a normálvektorai. Vegyünk egy tetszőleges normálvektort és azzal reprezentáljuk l -t. $\lambda \neq 0 \in \text{GF}(q)$ esetén \underline{n} és $\lambda \underline{n}$ ugyanazt az alteret határozza meg: $l = \underline{n}^\perp = \{\underline{x} : \underline{x} \cdot \underline{n} = 0\}$. Vezessük be a projektív sík egyenesének homogén koordinátáit, legyen $[a : b : c] = \{(\lambda a, \lambda b, \lambda c) \mid \lambda \in \text{GF}(q) \setminus \{0\}\} = \{\underline{x} : \underline{x} \cdot (a, b, c) = 0\}$. Normálás után megkapjuk az összes egyenest:

- $[a : b : 1]$, az ilyen egyenesek száma: q^2

- $[a : 1 : 0]$, az ilyen egyenesek száma: q
- $[1 : 0 : 0]$, az ilyen egyenesek száma: 1

Legyen $P = (x : y : z)$ tetszőleges pont, és $l = [a : b : c]$ tetszőleges egyenes. Ekkor

$$P \in l \Leftrightarrow ax + by + cz = 0.$$

Ezzel beláttuk az alábbi tételt.

3.2.3. Tétel. [26, 1.1.3. tétel]

Homogén koordináták segítségével az $\text{GF}(q)$ véges testre építhetünk projektív síkot, melyet $\text{PG}(2, q)$ -val jelölünk.

3.2.4. Példa. Nézzük meg, hogyan építhetünk $\text{GF}(2)$ -re projektív síkot. Legyen V 3-dimenziós vektortér $\text{GF}(2) = \{0, 1\}$ felett. A 2-dimenziós altereknek 4 eleme van, a nulla elem, két lineárisan független vektor és ezek összege. Vagyis ekkor

$$\begin{aligned} V &= \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\} \\ \mathcal{P} &= \{\{(0, 0, 0), (1, 0, 0)\}, \{(0, 0, 0), (0, 1, 0)\}, \{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}, \{(0, 0, 0), (1, 1, 0)\}, \\ &\quad \{(0, 0, 0), (1, 0, 1)\}, \{(0, 0, 0), (0, 1, 1)\}, \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}\} \\ \mathcal{L} &= \{\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}, \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\}, \\ &\quad \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}, \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1)\}, \\ &\quad \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}, \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}, \\ &\quad \{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}\} \end{aligned}$$

Így ezekkel a tétel szerint a $\text{PG}(2, 2)$ projektív síkot kapjuk, melyet Fano-síknak nevezünk. Ekkor $q^2 + q + 1 = 7$, tehát a projektív síknak 7 pontja és 7 egyenese lesz. Állítsuk elő a pontokat és egyeneseket a homogén koordinátákkal:

$$\begin{array}{ll} P_1(0 : 0 : 1) & l_1[0 : 0 : 1] \\ P_2(0 : 1 : 1) & l_2[0 : 1 : 1] \\ P_3(1 : 0 : 1) & l_3[1 : 0 : 1] \\ P_4(1 : 1 : 1) & l_4[1 : 1 : 1] \\ P_5(0 : 1 : 0) & l_5[0 : 1 : 0] \\ P_6(1 : 1 : 0) & l_6[1 : 1 : 0] \\ P_7(1 : 0 : 0) & l_7[1 : 0 : 0] \end{array}$$

Érdekes meggondolni, hogy itt előfordulhat, hogy egy vektor merőleges önmagára. Legyen $\underline{n} = [1 : 0 : 1]$, ekkor $\underline{n}^\perp = \{[0 : 1 : 0], [1 : 0 : 1], [1 : 1 : 1]\}$. Vagyis $\underline{n} \in \underline{n}^\perp$, de ez nem okoz problémát a sík konstrukciójába.

Nézzük, ha megvan a projektív sík, hogyan áll elő az illeszkedési mátrixa. Az illeszkedési mátrixhoz minden pontot minden egyenessel össze kell vetni, hogy illeszkedik-e, ha igen 1-et írunk a mátrixba, különben 0-t. Két példát mutatok erre, majd megadom a mátrixot.

Nézzük a $P_3(1 : 0 : 1)$ pontot és $l_6[1 : 1 : 0]$ egyenest.

$$1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1 + 0 + 0 = 1$$

Vagyis a $P_3 \notin l_6$, azaz a mátrixba 0 kerül. A $P_4(1 : 1 : 1)$ és $l_2[0 : 1 : 1]$ esetén:

$$1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{2}$$

Vagyis a $P_4 \in l_2$, azaz a mátrixba 1 kerül. Így végigszámolva, az alábbi illeszkedési mátrixot kapjuk (az i . oszlop az i . pontot jelöli, a j . sor pedig a j . egyenest):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Előállítom a szükséges véges testeket, melyekre később is szükségünk lesz még. A játék szempontjából ezekre a prímszámokra van szükségünk: 4, 8, 9. A következő a 16 lenne, de az azt jelentené, hogy 17 szimbólum kerül egy kártyára, ami oktatási céllal már szerintem nem szükséges. A testek konstruálásához szükségünk van algebrai eszközökre, ezeket a példákön keresztül bemutatom.

3.2.5. Példa. A $\text{GF}(4)$ testet szeretnénk megkonstruálni, ez egy 2-dimenziós vektortér $\text{GF}(2)$ felett, hiszen $4 = 2^2$. Ehhez keresnünk kell egy irreducibilis polinomot $\text{GF}(2)$ felett, mely másodfokú. Másod- és harmadfokú polinomok esetén pontosan azok irreducibilisek, melyeknek nincs gyöke. $\text{GF}(2)$ -ben ezt könnyű ellenőrizni, hiszen a lehetséges gyökök a 0 és 1. Elkezdem vizsgálni a másodfokú polinomokat:

$$x^2 \longrightarrow 0^2 = 0, \text{ van gyöke, nem irreducibilis}$$

$$x^2 + 1 \longrightarrow 1^2 + 1 \equiv 0 \pmod{2}, \text{ van gyöke, nem irreducibilis}$$

$$x^2 + x + 1 \longrightarrow 0^2 + 0 + 1 = 1; 1^2 + 1 + 1 \equiv 1 \pmod{2}, \text{ nincs gyöke, irreducibilis}$$

Vagyis a $\text{GF}(4) \cong \text{GF}(2)[x]/(x^2 + x + 1)$. Nézzük, hogyan állnak elő a test elemei. Az irreducibilis polinommal maradékosan osztva megkapjuk, hogy a test elemei $(ax + b)$ alakúak:

$f(x) = (x^2 + x + 1)g(x) + (ax + b)$. Vagyis $\text{GF}(4) = \{0, 1, x, x + 1\}$. A testbeli szorzáshoz pedig az alábbi észrevételt használhatjuk:

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow x^2 \equiv -x - 1 \equiv x + 1 \pmod{2}.$$

Így például $x(x + 1) = x^2 + x = x + 1 + x = 2x + 1 = 1$, és $x + (x + 1) = 2x + 1 = 1$. A $\text{GF}(4)$ szorzótáblája megtalálható a B.1. mellékletben.

3.2.6. Példa. Most állítsuk elő a 8 elemű testet, $8 = 2^3$, így $\text{GF}(8)$ egy 3-dimenziós vektortér $\text{GF}(2)$ felett. Hasonlóan az előző példához, keressük egy harmadfokú irreducibilis polinomot modulo 2.

$$x^3 \longrightarrow 0^3 = 0, \text{ van gyöke, nem irreducibilis}$$

$$x^3 + 1 \longrightarrow 1^3 + 1 \equiv 0 \pmod{2}, \text{ van gyöke, nem irreducibilis}$$

$$x^3 + x + 1 \longrightarrow 0^3 + 0 + 1 = 1; 1^3 + 1 + 1 \equiv 1 \pmod{2}, \text{ nincs gyöke, irreducibilis}$$

Így a $\text{GF}(8) \cong \text{GF}(2)[x]/(x^3 + x + 1)$. Az irreducibilis polinommal maradékosan osztva $f(x) = (x^3 + x + 1)g(x) + (ax^2 + bx + c)$, azaz a test elemei $(ax^2 + bx + c)$ alakúak. Tehát $\text{GF}(8) = \{0, 1, x, x + 1, x^2, x^2 + 1, x^2 + x, x^2 + x + 1\}$. Végül a szorzás itt is leegyszerűsödik, hiszen

$$x^3 + x + 1 \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow x^3 \equiv -x - 1 \equiv x + 1 \pmod{2}.$$

A $\text{GF}(8)$ szorzótáblája megtalálható a B.2. mellékletben.

3.2.7. Példa. Végül konstruáljuk meg a 9 elemű testet, ekkor $9 = 3^2$, vagyis $\text{GF}(9)$ egy 2-dimenziós vektortér $\text{GF}(3)$ felett. Keressünk egy másodfokú irreducibilis polinomot modulo 3.

$$x^2 \longrightarrow 0^2 = 0, \text{ van gyöke, nem irreducibilis}$$

$$x^2 + 1 \longrightarrow 0^2 + 1 = 1; 1^2 + 1 \equiv 2; 2^2 + 1 \equiv 2 \pmod{3}, \text{ nincs gyöke, irreducibilis}$$

Tehát $\text{GF}(9) \cong \text{GF}(3)[x]/(x^2 + 1)$, $f(x) = (x^2 + 1)g(x) + (ax + b)$, vagyis az elemei $(ax + b)$ alakúak. Így $\text{GF}(9) = \{0, 1, 2, x, x + 1, x + 2, 2x, 2x + 1, 2x + 2\}$. A szorzáshoz pedig alkalmazzuk az alábbi kongruenciát:

$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow x^2 \equiv 2 \pmod{3}.$$

A $\text{GF}(9)$ szorzótáblája megtalálható a B.3. mellékletben.

3.2.8. Példa. A 4 elemű testre épített projektív síkhoz is megadom a pontokat és egyeneseket. Legyen V 3-dimenziós vektortér $\text{GF}(4)$ felett, ahol $\text{GF}(4) = \{0, 1, x, x + 1\}$. A 3.2.3. tétel alapján erre a $\text{PG}(2, 4)$ projektív sík épül. Ekkor $q^2 + q + 1 = 21$, tehát a projektív síknak 21 pontja és 21 egyenese lesz.

$P_1(0 : 0 : 1)$	$P_8(1 : x + 1 : 1)$	$P_{15}(x + 1 : x : 1)$
$P_2(0 : 1 : 1)$	$P_9(x : 0 : 1)$	$P_{16}(x + 1 : x + 1 : 1)$
$P_3(0 : x : 1)$	$P_{10}(x : 1 : 1)$	$P_{17}(0 : 1 : 0)$
$P_4(0 : x + 1 : 1)$	$P_{11}(x : x : 1)$	$P_{18}(1 : 1 : 0)$
$P_5(1 : 0 : 1)$	$P_{12}(x : x + 1 : 1)$	$P_{19}(x : 1 : 0)$
$P_6(1 : 1 : 1)$	$P_{13}(x + 1 : 0 : 1)$	$P_{20}(x + 1 : 1 : 0)$
$P_7(1 : x : 1)$	$P_{14}(x + 1 : 1 : 1)$	$P_{21}(1 : 0 : 0)$

$l_1[0 : 0 : 1]$	$l_8[1 : x + 1 : 1]$	$l_{15}[x + 1 : x : 1]$
$l_2[0 : 1 : 1]$	$l_9[x : 0 : 1]$	$l_{16}[x + 1 : x + 1 : 1]$
$l_3[0 : x : 1]$	$l_{10}[x : 1 : 1]$	$l_{17}[0 : 1 : 0]$
$l_4[0 : x + 1 : 1]$	$l_{11}[x : x : 1]$	$l_{18}[1 : 1 : 0]$
$l_5[1 : 0 : 1]$	$l_{12}[x : x + 1 : 1]$	$l_{19}[x : 1 : 0]$
$l_6[1 : 1 : 1]$	$l_{13}[x + 1 : 0 : 1]$	$l_{20}[x + 1 : 1 : 0]$
$l_7[1 : x : 1]$	$l_{14}[x + 1 : 1 : 1]$	$l_{21}[1 : 0 : 0]$

Nézzünk egy példát a szorzásra, vegyük a $P_{12}(x : x + 1 : 1)$ pontot és $l_8[1 : x + 1 : 1]$ egyenest.

$$x \cdot 1 + (x + 1) \cdot (x + 1) + 1 \cdot 1 = x + x^2 + 2x + 1 + 1 \equiv x + x^2 \equiv x + x + 1 \equiv 1 \pmod{2}$$

Vagyis a $P_{12} \notin l_8$, azaz a mátrixba 0 kerül, így folytatva megkapjuk az illeszkedési mátrixot.

4. Bisíkok

Ebben a fejezetben áttekintem a Gemini játékhoz szükséges bisíkokat, ismertetek hozzájuk két konstrukciót, majd bemutatom, hogyan tudunk ezekből játékot készíteni. (Egy további konstrukciót az 5. fejezetben is látható.) A fejezetben többnyire Szőnyi jegyzetéből [26] a 6.3. fejezet felépítését követem, valamint felhasználom a 8. fejezetet.

4.1. Bisíkok általánosan

A négyzetes $(v, k, 2)$ -blokkrendszert *bisíknak* nevezzük. A bisík rendje $n = k - 2$, a pontok száma megegyezik a blokkok számával, amelyeket ki tudunk fejezni k -val a 2.4.19. állítás segítségével.

$$\begin{aligned} b &= \frac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)} \\ v &= \frac{2v(v-1)}{k(k-1)} \\ v-1 &= \frac{k(k-1)}{2} \\ v &= \frac{k(k-1)}{2} + 1 \end{aligned}$$

A projektív síkok esetében, ahol $\lambda = 1$, láttuk, hogy végtelen sok struktúra létezése bizonyított. A $\lambda = 2$, azaz a bisíkok esetében jelentősen kevesebbet tudunk, csak néhány k -ra bizonyított a létezés. Pontosán egy bisík létezik $k = 3, 4, 5$ -re, három nem-izomorf bisík $k = 6$ -ra és négy $k = 9$ -re. Továbbá $k = 11$ -re pontosán öt bisík van [13], míg $k = 13$ -ra ismerünk kettőt, de nem tudjuk ezekre a paraméterekre van-e több. Ezek a ma ismert bisíkok és csak sejtés, hogy véges bisíkok léteznek. [26, 6.3. fejezet]

A korábban kimondott, négyzetes blokkrendszerekre vonatkozó feltételek természetesen itt is érvényesek. Ezek közül kiemelem a 2.4.29. Bruck-Ryser-Chowla tételt, mely a négyzetes blokkrendszer létezésre vonatkozó szükséges feltételt ad. A tételben feltétel, hogy v páratlan, ami jelenleg azt jelenti, hogy $v = \frac{k(k-1)}{2} + 1$ páratlan, vagyis $\frac{k(k-1)}{2}$ páros. Ekkor k vagy $k - 1$ osztható 4-gyel, azaz $k \equiv 0$ vagy $1 \pmod{4}$.

4.1.1. Következmény. [26, 6.3.1. korollárium]

Ha $k \equiv 2$ vagy $3 \pmod{4}$, akkor $n = k - 2$ négyzetszám kell legyen.

Ha $k \equiv 0$ vagy $1 \pmod{4}$, akkor az

$$x^2 = (k-2)y^2 + (-1)^{\frac{k(k-1)}{4}} 2z^2$$

diofantoszi egyenletnek van nemtriviális egész megoldása.

Ennek következménye, hogy ha $n \leq 11$, akkor n értékei az 1, 2, 3, 4, 7, 9, 11 lehetnek. A következő táblázatban látható, hogy adott rendű (n) bisík esetén hány kártyát (v) tudunk készíteni és egy kártyán hány szimbólum (r) szerepel.

n	v	r
1	4	3
2	7	4
3	11	5
4	16	6
7	37	9
9	56	11
11	79	13

Az első négy esetben nagyon kevés kártyát kapunk, az utolsó három esetben viszont már használható méretű paklit nyerünk és a szimbólumok száma is még kezelhető. Tehát a generátorba ezek az opciók kerültek bele.

4.2. Konstrukció gráfokkal

A bisíkokat ábrázolhatjuk gráfcsaládokkal, ez a módszer Hussaintól származik. Tekintsünk egy \mathbf{B} bisíkot, egy p pontját és B blokkot, mely nem megy át p -n. Ekkor a $\Gamma(p)$ gráf csúcsai legyenek a B pontjai, $x, y \in B$ csúcsokat akkor kötjük össze éllel, ha az x, y pontokon átmenő, B -től különböző blokk tartalmazza p -t. Ekkor egy egyszerű gráfot kapunk B pontjain, hiszen minden pontpárt két blokk tartalmaz. Ha vesszük a $\Gamma(p)$ gráfokat minden $p \notin B$ pontra, akkor a \mathbf{B} bisík Hussain gráfjait kapjuk, melyekre az alábbi tulajdonságok érvényesek.

4.2.2. Tétel. [26, 6.3.3. tétel]

Legyen \mathbf{D} k -uniform bisík és rögzítsünk egy B blokkot. Ekkor a B -hez tartozó Hussain gráfok rendszere az összes $p \notin B$ pontra van definiálva, így $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ gráfból áll és eleget tesz az alábbiaknak:

1. minden gráf 2-reguláris,
2. két különböző gráfnak pontosan két közös éle van.

BIZONYÍTÁS. Vegyük egy tetszőleges x pontját valamely gráfnak, ez pontosan akkor van összekötve az $y \in B$ ponttal, ha x, y, p egy blokkban vannak. Mivel x és p két közös blokkban vannak

benne, ezért két ilyen y -t fogunk találni. Így egy gráfban minden csúcs foka 2, azaz 2-reguláris.

Vegyük a p_i és p_j pontokhoz tartozó gráfokat, a pontok két közös blokkban vannak benne, legyenek ezek B_1 és B_2 . Ezeknek a B blokkal 2-2 közös pontja van, így az ezek által alkotott élek lesznek a két gráf közös élei. ■

4.2.3. Állítás. A tétel megfordítása is igaz, vagyis ha meg tudunk adni k ponton $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ gráfot, melyek teljesítik a két feltételt, akkor bisíkot kapunk.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy találtunk a feltételeknek megfelelő gráfcsaládot, melynek csúcsai: $V = 1, 2, \dots, k$, a Hussain gráfok pedig: H_i , ahol $i = 1, 2, \dots, \binom{k-1}{2}$. Nézzük, hogyan kapjuk meg ebből a blokkrendszer.

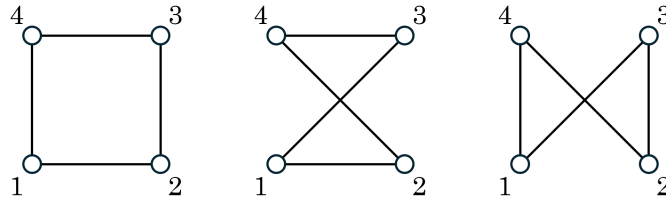
A pontok a V elemei és az (i) indexek. Az egyik blokk a V halmaz, a többi blokkot pedig megkapjuk úgy, hogy bármely $\{a, b\} \subset V$, $a \neq b$ -hez hozzávesszük azon (i) indexeket, amelyekre az $\{a, b\}$ éle H_i -nek. Ezeket a blokkokat $B_{\{a,b\}}$ -vel jelöljük.

Vizsgáljuk meg, hogy ekkor teljesül-e, hogy bármely két ponton pontosan két blokk megy át. Ha $a, b \in V$, akkor egyszerű, mert a és b pontok a V -ben, mint blokkban, valamint a $B_{\{a,b\}}$ blokkban vannak benne. Ha az $a \in V$ és (i) pontokon átmenő blokkokat vizsgáljuk, akkor nézzük a H_i -ben az a -ból kiinduló éleket. Ezek legyenek az $\{a, b\}$ és $\{a, c\}$ élek (kettő van, hiszen másodfokú reguláris gráf), ekkor éppen a $B_{\{a,b\}}$ és $B_{\{a,c\}}$ blokkok mennek át az $\{a, (i)\}$ pontokon. Végül, ha az $(i), (j)$ típusú pontokon átmenő blokkokat számoljuk, H_i és H_j gráfnak 2 közös éle van, vagyis az ezekhez tartozó blokkok mennek át rajtuk.

Ellenőrizni kell még, hogy a bisík k -uniform, amivel ekvivalens négyzetes rendszerben, hogy minden pont k blokkhoz tartozik. Ha veszünk egy $a \in V$ pontot, akkor átmegy rajta az összes $B_{\{a,b\}}$ blokk, ahol $b \in V$, $a \neq b$. Ilyen b éppen $k - 1$ van és még átmegy a V is, így összesen k blokkban van benne. Az (i) pontok pedig éppen annyi blokkban vannak benne, ahány éle van a H_i -nek. Ez pedig k , hiszen a gráfban k csúcs van, minden csúcs foka 2 és az élek száma a fokok összegének fele. ■

Ezzel már meg is kaptuk, hogyan tudunk bisíkot konstruálni. A következőkben kisebb k értékekre konkrétan megmutatom hogyan tudunk bisíkot konstruálni. Ha rendelkezésünkre áll a bisík illeszkedési mátrixa, akkor pedig már kártyapaklit is tudunk készíteni a 2.3 alfejezetben látott módszerrel.

4.2.4. Példa. Tekintsük a $k = 4$ esetet. Ekkor $V = 1, 2, 3, 4$ és $\frac{(k-1)(k-2)}{2} = 3$ gráfot keresünk, melyek 2-regulárisak és mindegyiknek 2 – 2 közös éle van. Ezek könnyen megtalálhatóak, az ábrán látható.



3. ábra. Hussain gráfok $k = 4$ -re

Állítsuk elő a bisíkot. A pontok: $1, 2, 3, 4, (1), (2), (3)$, azaz $v = b = 7$. A 7 blokkot pedig megkapjuk az élek megkeresésével:

$$B_{\{1,2\}} = \{1, 2, (1), (2)\}$$

$$B_{\{1,3\}} = \{1, 3, (2), (3)\}$$

$$B_{\{1,4\}} = \{1, 4, (1), (3)\}$$

$$B_{\{2,3\}} = \{2, 3, (1), (3)\}$$

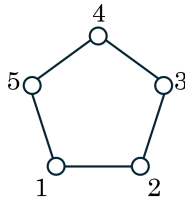
$$B_{\{2,4\}} = \{2, 4, (2), (3)\}$$

$$B_{\{3,4\}} = \{3, 4, (1), (2)\}$$

$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

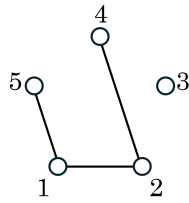
4.2.5. Példa. Vizsgáljuk meg a $k = 5$ esetet, ekkor a csúcsok halmaza: $V = 1, 2, 3, 4, 5$ és $\frac{(k-1)(k-2)}{2} = 6$ gráfból fog állni a Hussain gráfok rendszer. A 2-reguláris gráfok körök uniója, ez 5 csúcs esetén azt jelenti, hogy izomorf az 5 hosszú körrel, vagyis C_5 -tel, különben ha két kör uniója lenne, akkor az egyik legfeljebb 2 csúcsból állna, amely nem kör (és nem is 2-reguláris). Tehát minden gráf izomorf lesz a C_5 -tel, a csúcsok sorrendje lesz eltérő.

A csúcsok számozása tetszőlegesen megválasztható, így tegyük fel, hogy az első gráf, amelyből kiindulunk az ábrán látható gráf.



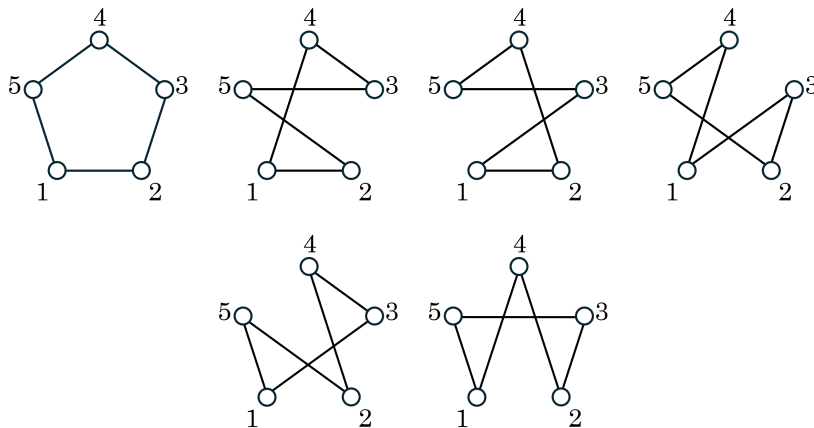
4. ábra. Első Hussain gráf $k = 5$ -re

Olyan gráfokat keresünk ehhez, amelyekkel két közös éle van. Vegyünk két élt, melyek egy csúcsból indulnak ki, legyen ez az 1-es csúcs. Ekkor a 2-es csúcsot nem köthetem össze a 3-assal, hiszen akkor több közös éle lenne az eredeti gráffal. Szintén nem köthetem össze az 5-tel, mert akkor lezárnám a kört, amit már beláttam, hogy nem lehet. Így marad a 4-es csúcs.



5. ábra.

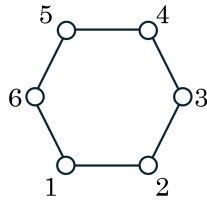
Ekkor az 5-öst, ha összekötném a 4-gyel, akkor lezárnám a kört és kimaradt a 3, tehát marad a 3-as csúcs. Ekkor a 4 és 3 csúcsoknak kevés a fokszámuk, ezeket kell összekötnöm, de így 3 közös éle van az eredeti gráffal. Tehát arra jutottam, hogy nem választhatunk egy csúcsból induló éleket. Ebben az esetben az eredeti gráf 5 éléből kiválasztok egyet és amellé a második élnek már csak kettőből választhatok, mert nem lehet önmaga és a két végpontjából kiinduló élek, azaz $5 \cdot 2$. Ekkor viszont minden élpárost duplán számoltam, így azt kapom, hogy $\frac{5 \cdot 2}{2} = 5$ élpárt tudok választani, ezekből készíthetek gráfokat. Így 6 gráfot találtunk, éppen amennyi kell a Hussain rendszerhez. Ezeket innen már könnyű megtalálni, az ábrán láthatóak. Ez azt jelenti, hogy $k = 5$ -re egyértelmű a Hussain gráf rendszer, vagyis egyetlen 3-adrendű bisík létezik.



6. ábra. Hussain gráfok $k = 5$ -re

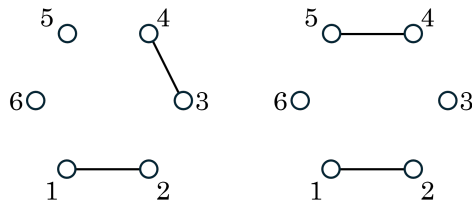
Hussain belátta, hogy $k = 6$ -ra három nem-izomorf Hussain gráf rendszer van. Ezek közül egy gráfcsaládot ismertetek.

4.2.6. Példa. Ha $k = 6$, akkor $\frac{(k-1)(k-2)}{2} = 10$ gráfot keresünk a $V = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ csúcsokon. Ha kiindulok az ábrán látható körből, akkor hasonlóan a $k = 5$ esethez itt is észrevehetjük, hogy egy csúcsból kiinduló éleket nem választhatok a következő gráfhoz.



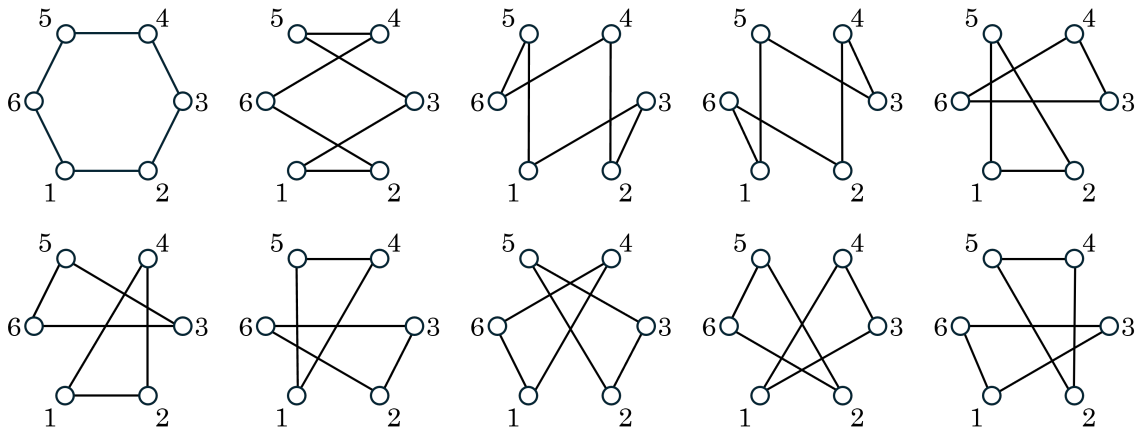
7. ábra. Első Hussain gráf $k = 6$ -ra

Ha a baloldali ábrán látható módon választok két élt, akkor összesen 6-féle gráfot kaphatok, azaz 7-féle gráf van eddig. Ehhez hozzáveszek még 3-at, ahol „szemközti” éleket választok (mint a jobboldali ábrán).



8. ábra.

Így kapunk összesen 10 gráfot és ellenőrizhető, hogy bármely kettőnek pontosan két közös éle van.



9. ábra. Hussain gráfok $k = 6$ -ra

Ismert egy másik módszer arra, hogyan lehet gráfokból blokkrendszereket konstruálni, ehhez az *erősen reguláris gráfokra* lesz szükségünk.

4.2.7. Definíció. [26, 8.1.2. definíció]

A Γ gráfot (n, k, λ, μ) paraméterű erősen reguláris gráfnak nevezzük, ha a csúcsok száma n , a

gráf k -adfokú reguláris, két összekötött csúcs közös szomszédjainak száma λ és két összekötetlen csúcsé μ .

A Γ gráf szomszédsági mátrixa legyen A , ahol $a_{ij} = 1$, ha az i . és j . csúcsok között van él, különben $a_{ij} = 0$.

4.2.8. Tétel. [26, 8.3.1., 8.3.2. tételek]

Legyen Γ erősen reguláris gráf és szomszédsági mátrixa A .

1. Ha $\mu = \lambda$, akkor $M = A$ tekinthető egy négyzetes (n, k, λ) -blokkrendszer illeszkedési mátrixának.
2. Ha $\mu = \lambda + 2$, akkor az $M = A + I$ tekinthető egy négyzetes $(n, k + 1, \lambda + 2)$ -blokkrendszer illeszkedési mátrixának.

BIZONYÍTÁS.

1. Az A szomszédsági mátrix szimmetrikus a főátlóra, hiszen irányítatlanok a gráf élei, így $A = A^T$. Az AA^T mátrix éppen azt adja meg, hogy két csúcsnak hány közös szomszédja van, vagyis a főátlóban k van, hiszen minden csúcsnak k a foka, a többi mezőn λ van, hiszen bármely két csúcsnak λ közös szomszédja van. Ezek alapján

$$AA^T = A^2 = (k - \lambda)I + \lambda J.$$

Ekkor az $M = A$ éppen a négyzetes (n, k, λ) -blokkrendszer illeszkedési mátrixa.

2. Az $M = A + I$ -re szintén igaz, hogy $M = M^T$. Felhasználom, hogy az I egységmátrix négyzete önmaga és a vele való szorzás elhagyható. Nézzük, hogyan áll elő ebben az esetben az $AA^T = A^2$. A főátlóban ismét k van, azokon a helyeken, ahol két nem szomszédos csúcs találkozik $\mu = \lambda + 2$ kell, hogy szerepeljen. Ez eddig leírható úgy, hogy $(k - \lambda - 2)I + (\lambda + 2)J$, azonban ha két csúcs szomszédos, akkor a $\lambda + 2$ helyett, λ kellene. Ezt ki tudjuk úgy küszöbölni, hogy levonunk belőle $2A$ -t, hiszen ez éppen azokon a mezőkön lesz 2 , ahol két szomszédos csúcs metszete van. Így $A^2 = (k - \lambda - 2)I + (\lambda + 2)J - 2A$. Ezeket felhasználva az alábbi alakra hozható az MM^T mátrix.

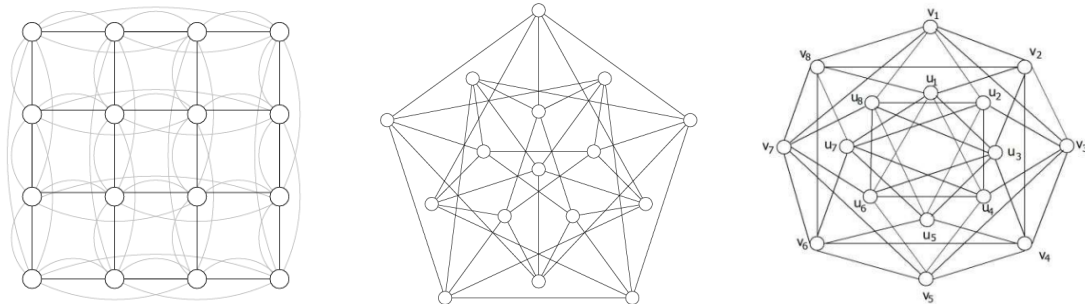
$$\begin{aligned} MM^T &= M^2 = (A + I)^2 = A^2 + 2A + I = \\ &= (k - \lambda - 2)I + (\lambda + 2)J - 2A + 2A + I = (k - \lambda - 1)I + (\lambda + 2)J \end{aligned}$$

Ekkor M éppen a $(n, k + 1, \lambda + 2)$ -blokkrendszer illeszkedési mátrixa. ■

Mi azokat a gráfokat keressük, ahol a blokkrendszer λ paramétere 2 , hiszen azokból lehetnek bisíkok. Tehát a $\mu = \lambda = 2$ vagy pedig $\mu = \lambda + 2 = 2$, vagyis $\lambda = 0$ paraméterű gráfok

kellenek.

Az $L_2(4)$ egy $(16, 6, 2, 2)$ paraméterű erősen reguláris gráf, valamint a Shrikhande-gráf, mely szintén $(16, 6, 2, 2)$ paraméterű, két nem-izomorf $(16, 6, 2)$ -blokkrendszert adnak, azaz negyedrendű bisíkokat. A Clebsch-gráf $(16, 5, 0, 2)$ paraméterű gráf szintén egy $(16, 6, 2)$ -blokkrendszert ad, vagyis ez is negyedrendű bisík. Ezekkel megkapjuk az összes $k = 6$ paraméterű bisíkot.

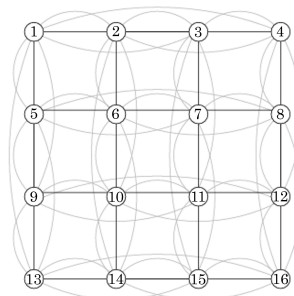


10. ábra. $L_2(4)$ gráf, Clebsch-gráf [26, 8.1., 8.2. ábrák] és Shrikhande-gráf [21]

A Gewirtz-gráf $(56, 10, 0, 2)$ erősen reguláris gráf a $(56, 11, 2)$ -blokkrendszert adja, vagyis egy 9-edrendű bisíkot, ennek azonban ábrája meglehetősen bonyolult, egyesével leolvasni az illeszkedést rengeteg munka lenne. Helyette más konstrukcióval próbálkozom 9-edrendű bisíkra. A fenti ábrán látható gráfok és a Gewirtz-gráf is leírható ábra helyett algebrailag, de ezt most nem részletezzük.

Nézzük, hogyan tudjuk megkonstruálni a bisíkot, ha adottak ezek gráfok. A gráfnak felírjuk az A szomszédsági mátrixát. A 4.2.8. tétel alapján az A gráf lesz a bisík illeszkedési mátrixa. Ez azt jelenti, hogy az i . sor a bisík i . pontját jelöli és a j . oszlop a bisík j . blokkját. Így a mátrixból leolvashatóak az illeszkedések és így el tudjuk készíteni a bisíkra épített kártyajátékot. Nézzünk egy konkrét példát a mátrix felírására.

4.2.9. Példa. Az $L_2(4)$ gráf csúcsait beszámozom 1-től 16-ig és ez alapján írom fel a szomszédsági mátrixot.



11. ábra. $L_2(4)$ gráf számozott csúcsokkal [26, 8.2. ábra felhasználásával]

Például vizsgáljuk meg az 1-ből kiinduló élek, mely csúcsokba mennek: 2, 3, 4, 5, 9, 13. Vagyis a mátrix első sora:

0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0

Mivel a gráf élei irányítatlanok, így a szomszédsági mátrix szimmetrikus, tehát nem kell minden csúcsot végig megvizsgálni. Így végignézve megkapjuk a teljes mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ez éppen a bisík illeszkedési mátrixát adja, vagyis tekinthetünk a soraira mint kártyák és máris látjuk, hogy mely szimbólumoknak kell az adott kártyára kerülni.

4.3. Konstrukció automorfizmusokkal

Láthatjuk, ahogy nő a k , egyre nehezebb megtalálni a Hussain gráfokat, erősen reguláris gráfokból is csak néhányat ismerünk, melyekből bisíkot lehet konstruálni. A következő fejezetben még bemutatok egy konstrukciót differenciahalmazok segítségével, amikkel könnyen tudunk projektív síkot generálni és néhány bisíkot is. A legtöbb bisík azonban már kevésbé szimmetrikus, így azzal a módszerrel sem adhatók meg. A kártyák elkészítéséhez más módszert kerestem. *Colbourn* és *Dinitz* könyvében [4, II.6.47 Table] minden négyzetes (v, k, λ) -struktúrának, melynek létezéséről tudunk, adott egy megoldás a konstruálására. Ahhoz, hogy ezek működését megértsük, szükség van még néhány fogalomra, tételre.

A 2.1.2. definícióban már meghatároztam az automorfizmust, de kicsit még körbejárom ezt a fogalmat. Az ott definiált automorfizmus azt jelenti, hogy a pontoknak egy olyan permutációja az α , mely nem változtatja meg a blokkok halmazát, vagyis minden blokkra teljesül, hogy $\{\alpha(b) : b \in B\}$ is blokk. Egy \mathbf{D} illeszkedési struktúra összes automorfizmusa csoportot alkot, melyet $\text{Aut}(\mathbf{D})$ -vel jelölünk. Erre úgy is gondolhatunk, hogy ha \mathbf{P} a pontok halmaza, akkor $S_{\mathbf{P}}$ a szimmetriacsoportja, amely a \mathbf{P} halmazon értelmezett permutációk csoportja. Majd vesszük azon részcsoportját $S_{\mathbf{P}}$ -nek, amely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy bármely blokk képe szintén blokk. Ez a részcsoport a \mathbf{D} struktúra automorfizmus csoportja. Ilyen biztosan létezik, hiszen az identitás ezt teljesíti.

Egy P pontra $\text{Fix}(P)$ jelöli azon automorfizmusok halmazát, amelyek P -t helyben hagyják és hasonlóan $\text{Fix}(B)$ azon automorfizmusok halmaza, amelyek B blokkot helyben hagyják. Rögzített $\alpha \in \text{Aut}(\mathbf{D})$ esetén $|\{P \in \mathbf{P} : \alpha(P) = P\}|$ az α fixpontjainak száma és $|\{B \in \mathbf{B} : \{\alpha(b) : b \in B\} = B\}|$ az α fixblokkjainak száma. A következő tétel szerint ezek száma megegyezik az általunk vizsgált blokkrendszerekben.

4.3.10. Tétel. [26, 1.2.15. tétel]

Legyen \mathbf{D} egy négyzetes illeszkedési struktúra, melynek illeszkedési mátrixának determinánsa nem nulla, és legyen $\alpha \in \text{Aut}(\mathbf{D})$. Ekkor α fixpontjainak száma megegyezik α fixblokkjainak számával.

A blokkrendszer egy P pontjának az orbitja azon pontok halmaza, amelybe az automorfizmusok átviszik P -t, azaz $\{\alpha(P) : \alpha \in \text{Aut}(\mathbf{D})\}$, ezt nevezzük pont-orbitnak. A következő lemma ezeknek a számát adja meg.

4.3.11. Lemma. (Burnside-lemma) [26, 1.2.16. lemma]

Legyen $G \leq S_X$ permutációcsoport X -en. Ekkor

$$G \text{ orbitjainak száma} = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

Egy B blokk orbitja, pedig azon blokkok halmaza, amelyekbe a B eljut az automorfizmusok által, ez a blokk-orbit. Így az előző tételből és ebből a lemmából következik az alábbi eredmény.

4.3.12. Tétel. [26, 1.2.17. tétel]

Legyen \mathbf{D} olyan négyzetes illeszkedési struktúra, melynek illeszkedési mátrixának determinánsa nem nulla és legyen $G \leq \text{Aut}(\mathbf{D})$. Ekkor G pont-orbitjainak száma megegyezik a blokk-orbitok számával.

Abban az esetben, ha az automorfizmus csoport speciálisan tranzitív a pontokon és blokkokon, akkor elég megadni egy blokkot és a csoportot. Ezekből megkapható az összes blokk, vagyis röviden leírható a blokkrendszer. Valójában ilyen konstrukciót fogunk látni a következő fejezetben.

Ahogy már említettem, nem mindig ilyen egyszerű a helyzet, hiszen ez csak a szép szimmetrikus tulajdonságokkal rendelkező blokkrendszerekre működik. Lehet olyan, hogy a pontok, illetve blokkok több orbitra is bomlanak. Ez azt jelenti, hogy lehetnek például olyan blokkok, amelyekhez nem létezik automorfizmus, amely egymásba vinné azokat. Ebben az esetben minden blokk-orbitból meg kell adnunk egy blokkot és azokat az automorfizmusokat, amelyek ebből a blokkból az összes többit előállítják az adott orbitban. Ezzel a módszerrel még viszonylag tömören leírhatóak a blokkrendszerek.

4.3.13. Példa. Nézzünk egy példát *Colbourn* és *Dinitz* könyvéből [4, II.6.47 Table], hogyan lehet megadni a 9-edrendű bisíkot. Jelöljük az 56 pontot indexelve, vagyis a számok 1-től 8-ig mennek és az indexek modulo 7, azaz 0-tól 6-ig, így a pontok halmaz:

$$\{1_0, 2_0, \dots, 8_0, 1_1, 2_1, \dots, 8_1, \dots, 1_6, 2_6, \dots, 8_6\}$$

A megadott két blokk:

$$\{1_1, 2_2, 3_4, 4_1, 5_2, 6_4, 7_0, 7_3, 7_5, 7_6, 8_0\}, \{1_2, 1_5, 2_2, 2_5, 3_1, 3_6, 4_0, 4_1, 4_6, 7_1, 8_6\}$$

Ezekhez pedig három automorfizmus van megadva, ezek elég hosszúak, ezért \prod -mal adom meg, amely az automorfizmuscsoportbeli szorzásra vonatkozik.

$$\rho = \prod_{I=1}^8 (I_0 I_1 I_2 I_3 I_4 I_5 I_6)$$

$$\sigma = \prod_{i=0}^6 ((1_i 2_{2i} 3_{4i})(4_i 5_{2i} 6_{4i})(7_i 7_{2i} 7_{4i})(8_i 8_{2i} 8_{4i})) \quad (\text{indexek mod } 7)$$

$$\tau = \prod_{i=0}^6 ((1_i 4_{6i})(2_i 5_{6i})(3_i 6_{6i})(7_i 8_{6i})) \quad (\text{indexek mod } 7)$$

Tehát ha ezeket az automorfizmusokat alkalmazzuk a megadott blokkokra, majd az újonnan kapott blokkokra is, akkor előbb-utóbb megkapjuk az 56 blokkot. Én ezeket a programom segítségével generáltam ki, megtalálhatók a C.2. mellékletben.

Nekem ezen kívül 7-ed és 11-edrendű bisíkokra van szükségem. A 7-edrendűnél adott egy alap blokk és annak a permutációival modulo 37 megkapom az összes blokkot. Ezt a konstrukciót a következő fejezetben is látni fogjuk. A 11-nél hasonlóan van megadva, mint 9-re, ugyanúgy kell eljárni. Egyértelmű, de fontos, hogy a blokkokban a pontok sorrendje nem számít, így én azzal kezdtem a bisíkok generálását, hogy rendeztem a blokkokat. Ezek után pedig minden már meglévő blokkra alkalmaztam az összes automorfizmust, ha új blokkot találtam, akkor bevettem a blokkokhoz, különben figyelmen kívül hagytam. Ezt egészen addig folytatta a programom, amíg meg nem találta a megfelelő számú blokkot. Végül a programom visszaadta melyik kártyára, mely pontoknak, vagyis szimbólumoknak kell kerülniük. A generált blokkok megtalálhatók a C mellékletben. Az ezek alapján elkészített illeszkedési mátrixok pedig a D mellékletben.

5. Konstrukciók differenciahalmazokkal

Tekintsünk át egy másik lehetséges módszert, amellyel négyzetes blokkrendszereket lehet konstruálni, azaz projektív síkokat és bisíkokat is. Ehhez a *differenciahalmazokra* lesz szükségünk. Ezek segítségével könnyen tudunk véges projektív síkot generálni, kisebb számokra akár kézzel, segédeszközök nélkül, nagyobb számokra pedig viszonylag egyszerűen számítógép segítségével. A fejezet alapvetően Szőnyi jegyzetének [26] 9. fejezete alapján épül fel. A megértéshez felhasználtam Assmus és Key könyvének [1] 6.5. és 6.6. fejezetét, valamint néhány eredményt Colbourn, Dinitz könyvéből [4, VI.18.73 Table] és Kiss, Szőnyi könyvéből [22, 1. fejezet].

5.1. Differenciahalmazok

5.1.1. Definíció. [26, 9.1.1. definíció]

Legyen G additívan írt véges Abel-csoport. A $D \subset G$ részhalmazt (v, k, λ) differenciahalmaznak nevezzük, ha $|G| = v$, $|D| = k$, és minden $0 \neq g \in G$ -re pontosan λ olyan $d, d' \in D$ pár van, melyre $d - d' = g$.

Tehát például $G = \mathbb{Z}_n$ -re egy differenciahalmaz azon számokat tartalmazza, amelyek különbségeként előáll az összes szám modulo n , azaz a $0, 1, \dots, n - 1$ számokkal kongruensek a különbségek. Minden különbséget λ -szor kapunk meg a differenciahalmazból, ekkor λ -szoros differenciahalmazunk van. Ha D differenciahalmaz, akkor $\forall g \in G$ -re $D - g = \{d - g : d \in D\}$ is persze differenciahalmaz.

5.1.2. Példa. Nézzük meg a $G = \mathbb{Z}_7$ és $\lambda = 1$ esetet.

Ekkor az alaphalmazunk $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ezeket szeretnénk megkapni egy differenciahalmaz segítségével. Érdekes a D halmazunkat a $0, 1$ számokkal kezdeni, hiszen az 1 -et is meg kell kapnunk különbségeként. Ezzel a 6 -ot is megkaptuk, hiszen $0 - 1 = -1 \equiv 6 \pmod{7}$. Következő lépésben előállítom a 2 -t. Választhatnám a halmazban következő elemnek a 2 -t, hiszen $2 - 0 = 2$, azonban akkor újra előállna az 1 , mint $2 - 1 = 1$, amit nem szeretnénk. Helyette választom a 3 -at, így $3 - 1 = 2$. Ezzel megkapjuk az összes hiányzó elemet:

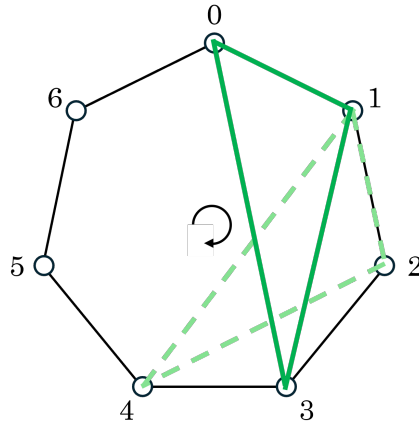
$$3 - 0 = 3$$

$$0 - 3 = -3 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$1 - 3 = -2 \equiv 5 \pmod{7}$$

Tehát találtunk egy differenciahalmazt: $D = \{0, 1, 3\}$. Ha az elején más számokat választok más halmazt kaptam volna meg, például $\{1, 2, 4\}$ vagy $\{3, 5, 6\}$, ezekkel ugyanúgy megkapnánk a G halmazt, hiszen D eltoltjai: $D + 1, D + 5$.

A példában láthattuk, hogy a differenciahalmaz nem egyértelmű, \mathbb{Z}_n esetén tekinthetjük a számokat, mint pontokat egy körön, ekkor egy halmaz elemeinek viszonya, vagyis a különbségek forgatással és tükrözéssel nem változnak. Így a differenciahalmazokkal ciklikusan reprezentálhatjuk a blokkrendszereket. Ezáltal minden ciklikus projektív síkhoz létezik differenciahalmaz.



12. ábra. Fano-sík ciklikus ábrázolása

Vegyünk egy \mathbf{D} négyzetes blokkrendszert és ennek egy G automorfizmus-csoportját. A $G \leq \text{Aut}(\mathbf{D})$ Singer-csoport, ha $|G| = v$, és G -nek egyetlen pont-orbitja van (ekkor a 4.3.10. tétel miatt egyetlen blokk-orbitja van) [26, 9.1.2. definíció].

5.1.3. Tétel. [26, 9.1.3. tétel]

Legyen G v elemű véges Abel-csoport és $k < v$. Pontosán akkor létezik $D \subset G$ (v, k, λ) differenciahalmaz, ha létezik olyan \mathbf{D} négyzetes (v, k, λ) -blokkrendszer, amelynek G Singer-csoportja.

BIZONYÍTÁS. Legyen $D \subset G$ (v, k, λ) differenciahalmaz. Legyen $\mathbf{D}(D)$ az a blokkrendszer, melynek ponthalmaza a $\mathbf{P}(D) = G$, blokkjai pedig a D eltoltjai G elemeivel, vagyis $\mathbf{B}(B) = \{D + g : g \in G\}$ és az illeszkedési reláció pedig az \in . Ezzel $\mathbf{D}(D)$ egy négyzetes (v, k, λ) -blokkrendszer, hiszen v pontja van, minden blokk mérete k és bármely két pont pontosan λ blokkban szerepel. Továbbá, ha tekintjük a $\{\varphi_g : x \mapsto x + g, g \in G\}$ automorfizmust, ekkor ez izomorf G -vel és egyetlen pont-orbit van.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy \mathbf{D} négyzetes (v, k, λ) -blokkrendszer, melynek Singer-csoportja G . $|G| = v$ és egyetlen pont-orbitja van, így vegyünk egy tetszőleges p pontot és a többi pontot azonosítsuk azzal a $g \in G$ csoportelemmel, amely p -t ebbe viszi, vagyis legyen p^g . Vegyünk egy B blokkot és a pontjaihoz tartozó csoportelemek halmaza legyen D . A p és p^g λ közös blokkban vannak benne, ezeket is azonosítsuk a csoportelemekkel, vagyis $B^{g^1}, \dots, B^{g^\lambda}$.

Vizsgáljuk meg, mi kell ahhoz, hogy p^g tényleg illeszkedjen ezekhez a blokkokhoz:

$$p^g \in B^{g_i} \Leftrightarrow p \in (B^{g_i})^{g^{-1}} = B^{g_i-g}$$

Most nézzük ez mit jelent p pontra nézve:

$$p \in B^{g_i-g} \Leftrightarrow p^{(g_i-g)^{-1}} = p^{g^{-g_i}} \in B$$

Ez összesen λ blokkra teljesül, vagyis a g csoportelem éppen λ -szor áll elő a D -beli elemek különbségeként, vagyis D egy differenciahalmazt alkot és mivel a csoportelemekből hoztuk létre így a $D \subset G$ is teljesül. ■

Vizsgáljuk meg, hogy van-e további automorfizmus az elemekkel való eltoláson kívül. Ha találunk ilyen, akkor könnyebben tudunk differenciahalmazt keresni. Például a Fano-sík esetén, ahol a pontok a $0, 1, \dots, 6$ és a blokkok a $D = \{0, 1, 3\}$ eltoltjai, a 2-vel való szorzás egy automorfizmus lesz, mivel ha minden blokkot megszorozunk 2-vel, akkor ugyanazokat a blokkokat kapjuk:

D	$2D$
$\{0, 1, 3\}$	$\{0, 2, 6\}$
$\{1, 2, 4\}$	$\{1, 2, 4\}$
$\{2, 3, 5\}$	$\{3, 4, 6\}$
$\{3, 4, 6\}$	$\{1, 5, 6\}$
$\{0, 4, 5\}$	$\{0, 1, 3\}$
$\{1, 5, 6\}$	$\{2, 3, 5\}$
$\{0, 2, 6\}$	$\{0, 4, 5\}$

5.1.4. Definíció. Legyen G tetszőleges Abel-csoport, $g \in G$, és $t \in \mathbb{N}^+$ szintén tetszőleges. Ekkor a t -vel való szorzást így értelmezzük:

$$tg = \underbrace{g + g + \dots + g}_{t \text{ db}}$$

5.1.5. Definíció. (M. Hall) [26, 9.1.7. definíció]

Tegyük fel, hogy G Abel-csoport, $D \subset G$ differenciahalmaz és legyen t a $|G|$ -hez relatív prím. Ekkor t -t *multiplikátornak* nevezzük, ha a t -vel szorzás a $\mathbf{D}(D)$ blokkrendszer automorfizmusát indukálja.

A multiplikátor tételek különböző feltételek mellett garantálják a multiplikátorok létezését blokkrendszerben. Ezek segítséget nyújtanak differenciahalmazok létezésének bizonyításához,

valamint létezés esetén a halmazok megtalálásához. A tételek közül én eggyel és annak bizonyításával foglalkozom ebben a dolgozatban. Mielőtt rátérünk, tekintsünk át még néhány szükséges eredményt és algebrai fogalmat.

5.1.6. Tétel. [26, 9.1.9. tétel]

Legyen D egy (v, k, λ) differenciahalmaz a G Abel-csoportban, ahol $(v, k) = 1$. Ekkor

1. minden multiplikátor fixálja D valamely eltoltját,
2. létezik olyan eltoltja a D -nek, amelyet fixál minden multiplikátor.

BIZONYÍTÁS.

1. Vegyük észre, hogy minden multiplikátor fixálja a 0 elemet, hiszen $t \cdot 0 = 0$, így a 4.3.10. tétel alapján egy blokkot is fixálnak. A blokkok pedig éppen a D eltoljai.

2. Legyen α a D elemeinek összege, $(v, k) = 1$ miatt G -ben tudunk osztani k -val, vagyis az összeget is leoszthatjuk k -val. Vegyük a $D' = D - \frac{\alpha}{k}$ eltoltat, ekkor D' elemeinek az összege 0 lesz, hiszen az összeg, vagyis α éppen $k \cdot \frac{\alpha}{k} = \alpha$ -val csökken. A D' -t ha megszorozom egy multiplikátorral, akkor valamely $g \in G$ -re $D' + g$ eltoltat kapom. Az automorfizmus viszont olyan eltoltat, amelyben az elemek összege 0, ugyanilyenbe viszi, vagyis $D' + g$ elemeinek összege is 0. Ez éppen kg , ami csak úgy lehet nulla, ha $g = 0$. Vagyis a D' eltoltat minden multiplikátor helyben hagyja. ■

Általában ezt a minden multiplikátor által fixált differenciahalmazt könnyebb megtalálni, hamarosan látunk rá példát.

Most következzen a multiplikátor tétel, melynek bizonyítása a következő alfejezetben található.

5.1.7. Tétel. (Első multiplikátor tétel) [26, 9.1.13. tétel]

Legyen D egy (v, k, λ) differenciahalmaz a G Abel-csoportban, továbbá legyen p az $n = k - \lambda$ olyan prímosztója, amely relatív prím v -hez. Ha $p > \lambda$, akkor a p multiplikátora D -nek.

A tétel felhasználásával egyszerűen bizonyítható, hogy nem létezik olyan ciklikus projektív sík, azaz $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ -blokkrendszer, melynek rendje osztható 6-tal. Ebben az esetben a 2, 3 multiplikátorok lennének, azaz létezne olyan differenciahalmaz, amelyre $D = 2D = 3D$. Ekkor a D -nek lennének olyan alakú elemei, hogy $a, 2a, 3a$, ami viszont ellentmondás, hiszen $\lambda = 1$, de $3a - 2a = 2a - a$, azaz nem csak egyszer áll elő minden különbség. [26, 9.1.15. állítás]

5.1.8. Példa. Keressünk differenciahalmazt $PG(2, 4)$ -hez.

Ekkor $n = 4$, $v = n^2 + n + 1 = 21$, azaz legyen $G = \mathbb{Z}_{21}$, valamint $k = n + \lambda = 5$, tehát

$|D| = 5$. A $p = 2$ osztója $n = 4$ -nek, relatív prím 5-höz és $p > \lambda = 1$. Tehát a multiplikátor tétel alapján a 2 multiplikátora D -nek, így 2 fixálja D valamely eltoltját, legyen ez D' , ezt próbáljuk megkeresni. Ez azt jelenti, ha $a \in G$ benne van a D' -ben, akkor $2a$ is, továbbá ha a nem lehet eleme D' -nek, akkor $-a$ sem, így elég 10-ig vizsgálnunk a számokat. Nézzük ezzel, mely elemek jöhetnek szóba és ne felejtjük, mindent modulo 21 veszünk.

- | | |
|---|---|
| 1. $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 11 \rightarrow 1$ | túl sok elem, egyik sem lehet benne D' -ben |
| 2. $3 \rightarrow 6 \rightarrow 12 \rightarrow 3$ | ez a 3 elem jó lehet |
| 3. $5 \rightarrow 10 \rightarrow 20 \rightarrow 19 \rightarrow 17 \rightarrow 13 \rightarrow 5$ | túl sok elem, egyik sem lehet benne D' -ben |
| 4. $7 \rightarrow 14 \rightarrow 7$ | ez a 2 elem is benne lehet |
| 5. $9 \rightarrow 18 \rightarrow 15 \rightarrow 9$ | ez a 3 elem is benne lehet |

Mivel a differenciahalmaz 5 elemű, így a 2. és 4. vagy az 5. és 4. alapján alkothatjuk meg D' -t. Azaz $D' = \{3, 6, 7, 12, 14\}$ vagy $D' = \{7, 9, 14, 15, 18\}$, ha végigszámoljuk a különbségeket, akkor láthatjuk, hogy mindkettő jó.

Nézzük, hogyan tudjuk egy differenciahalmazból előállítani a blokkrendszert. Tegyük fel, hogy van egy D differenciahalmazunk, melyre $|D| = k$. A G pontjai definíció szerint előállnak a D elemeinek különbségiből, legyen $|G| = v$. A blokkok pedig a D halmaz eltoltjai lesznek. Megnézzük egy különbség hányszor áll elő a D -ből, legyen ez λ . Vagyis megkaptunk egy (v, k, λ) -blokkrendszert.

5.1.9. Példa. Nézzük milyen blokkrendszert kapunk a $D = \{0, 1, 3, 9\}$ differenciahalmazból modulo 13 esetén. Számoljuk ki az összes különbséget:

$0 - 1 = -1 \equiv 12$	$1 - 3 = -2 \equiv 11$	$3 - 9 = -6 \equiv 7$
$0 - 3 = -3 \equiv 10$	$1 - 9 = -8 \equiv 5$	$9 - 0 = 9$
$0 - 9 = -9 \equiv 4$	$3 - 0 = 3$	$9 - 1 = 8$
$1 - 0 = 1$	$3 - 1 = 2$	$9 - 3 = 6$

Tehát $G = \{0, 1, \dots, 12\}$ halmazt megkaptuk és minden különbség egyszer állt elő, azaz $\lambda = 1$. A D halmaz eltoltjaival megkapjuk a blokkokat:

$$\mathbf{B} = \{\{0, 1, 3, 9\}, \{1, 2, 4, 10\}, \{2, 3, 5, 11\}, \{3, 4, 6, 12\}, \{4, 5, 7, 0\}, \{5, 6, 8, 1\}, \{6, 7, 9, 2\}, \{7, 8, 10, 3\}, \{8, 9, 11, 4\}, \{9, 10, 12, 5\}, \{10, 11, 0, 6\}, \{11, 12, 1, 7\}, \{12, 0, 2, 8\}\}$$

Ezzel egy $(13, 4, 1)$ -blokkrendszert állítottunk elő, és észrevehetjük, hogy ez éppen egy 3-adrendű projektív sík.

Az alábbi táblázatban megadok egy-egy differenciahalmazt minden $n \leq 11$ prímhatványra, ahol $\lambda = 1$. Ezek egyrésze megtalálható *Colbourn* és *Dinitz* könyvében [4, VI.18.73 Table], a többi pedig *Kiss* és *Szőnyi* könyvében [22, 1. fejezet]. Ezek segítségével a fenti példa alapján megkonstruálható az n -edrendű projektív sík, majd abból a $v = n^2 + n + 1$ kártyából álló pakli.

n	v	D
2	7	1, 2, 4
3	13	1, 2, 5, 7
4	21	1, 2, 5, 15, 17
5	31	1, 2, 4, 9, 13, 19
7	57	1, 2, 4, 14, 33, 37, 44, 53
8	73	1, 2, 4, 8, 16, 32, 37, 55, 64
9	91	1, 2, 4, 10, 28, 50, 57, 62, 78, 82
11	133	1, 11, 16, 40, 41, 43, 52, 60, 74, 78, 121, 128

5.1.10. Példa. Most nézzünk egy olyan példát, ahol $\lambda \neq 1$.

Keressünk a $(11, 5, 2)$ -blokkrendszerhez, vagyis 3-rendű bisíkhöz differenciahalmazt. Mivel az $n = 3$ -nak csak a $p = 3$ prímosztója és $(3; 11) = 1$, így a 3 az egyetlen multiplikátor. Induljunk az 1-ből és modulo 11 számolunk.

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 9 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 1$$

Ez éppen $k = 5$ számot generált, valamint ha megnézzük, minden szám kétszer áll elő különbségeként, így jó lesz differenciahalmaznak, vagyis $D = \{1, 3, 4, 5, 9\}$.

A legtöbb bisík nem ciklikus, így nem fogunk mindegyikhez differenciahalmazt találni, mint a projektív síkoknál. A fenti példán kívül még $n = 7$ -re ismert differenciahalmaz, mely megtalálható *Dinitz* könyvében [4, VI.18.73 Table]: $D = \{1, 7, 9, 10, 12, 16, 26, 33, 34\}$. A korábban vizsgált, automorfizmus segítségével konstruált esetben is megkaptuk valójában ezt a differenciahalmazt, a C.1. mellékletben éppen a B_2 blokk.

5.2. Multiplikátor tétel bizonyítása

Most rátérek egy bonyolultabb témára, amely meglehetősen absztrakt lesz, azonban így eljutunk a 5.1.7. multiplikátor tétel szép bizonyításához. A játékkészítés szempontjából nem szükséges a megértése, tehát kihagyható ez az alfejezet.

A következőkben legyen a G multiplikatíván írt csoport, vagyis elemei a komplex v -edik egységgyökök és $|G| = v$.

5.2.11. Definíció. A $\mathbb{Z}[G]$ csoportgyűrű elemei olyan $\sum_i a_i g_i = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots + c_v g_v$ formális összegek, ahol $g_i \in G, a_i \in \mathbb{Z}$.

Ezáltal az elemekre tekinthetünk úgy is, mint \mathbb{Z}^v vektorokra, vagyis olyan v hosszú vektorok, melyek elemei egész számok, azaz (a_1, a_2, \dots, a_v) . A különböző szorzás műveletekre különböző jelölést használok, hogy érthetőbb és követhetőbb legyen.

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots, a_v) + (b_1, b_2, \dots, b_v) &= (a_1 + b_1, \dots, a_v + b_v) \\ (a_1, a_2, \dots, a_v) \circ (b_1, b_2, \dots, b_v) &= \left(\sum_i a_i g_i \right) \circ \left(\sum_j b_j g_j \right) = \sum_{i,j} (a_i \cdot b_j) (g_i \times g_j) = \\ &= \sum_k c_k g_k, \text{ ahol } c_k = \sum_{i,j: g_i \times g_j = g_k} a_i \cdot b_j \end{aligned}$$

5.2.12. Példa. Például a \mathbb{Z}_2 csoport elemei multiplikatívan éppen a második egységgyökök, azaz $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)\}$. Ekkor a $\mathbb{Z}[G]$ elemei az alábbi alakúak:

$$a_1(1, 1) + a_2(-1, 1) + a_3(1, -1) + a_4(-1, -1)$$

Nézzünk egy példát a szorzásra:

$$\begin{aligned} (1, 3, 2, -2) \circ (-2, 3, -1, 2) &= \\ (1(1, 1) + 3(-1, 1) + 2(1, -1) - 2(-1, -1)) \circ (-2(1, 1) + 3(-1, 1) - 1(1, -1) + 2(-1, -1)) &= \\ -2(1, 1) + 3(-1, 1) - 1(1, -1) + 2(-1, -1) - 6(1, 1) + 9(-1, 1) - 3(1, -1) + 6(-1, -1) - &= \\ 4(1, 1) + 6(-1, 1) - 6(1, -1) + 4(-1, -1) + 4(1, 1) - 6(-1, 1) + 2(1, -1) - 4(-1, -1) &= \\ -3(1, 1) + 3(-1, 1) - 5(1, -1) + 9(-1, -1) &= (-3, +3, -5, 9) \end{aligned}$$

A csoportgyűrűben, ha $A = \sum a_i g_i$, akkor legyen $A^{(t)} = \sum a_i g_i^t$, valamint, ha $D \subset G$, akkor legyen \bar{D} a csoportgyűrű $\sum_{g \in D} g$ eleme (azaz a $g \notin D$ elemeknek megfelelő a_i együtthatók nullák).

Az Első multiplikátor tétel bizonyítása Szőnyi jegyzete [26, 9.1.11., 9.1.12. lemmák, 9.1.13. tétel] alapján készült, de a megértéshez felhasználtam Assmus és Key könyvét [1, 4.5, 4.6. fejezetek] is.

BIZONYÍTÁS. Vizsgáljuk meg mit jelent a $\mathbb{Z}[G]$ csoportgyűrűben az, hogy $D \subset G$ differenciahalmaz G -ben. A $\bar{D}\bar{D}^{(-1)}$ éppen az összes csoportgyűrűbeli elemet adja meg, pontosabban a semleges elemet (amit 1-gyel jelölök) k -szor, a összes többit λ -szor adja. Így $\bar{D}\bar{D}^{(-1)} = \lambda\bar{G} + (k - \lambda)1$. Multiplikatívan írt csoportban, a p pontosan akkor multiplikátor, ha a p -edik hatványra emelés indukálja a blokkrendszer automorfizmusát. (Tehát a p -vel való szorzás helyett, a p -vel való hatványozást kell venni.) A $\bar{D}^{(p)} = \sum_{g \in D} g^p$ csoportgyűrűbeli elem,

hiszen ez a g^p csoportelemek összege 0 és 1 együtthatókkal, vagyis létezik $X \subset G$, melyre $\bar{D}^{(p)} = \bar{X}$. Erre kellene belátni, hogy létezik $g \in G$, hogy $X = Dg$, mivel multiplikatív csoportban Dg a D halmaz g -vel való eltolása. Ezt úgy fogom belátni, hogy először megmutatom, hogy X minden blokkot legalább λ pontban metsz, majd ebből, hogy X maga is blokk, amiből már következik, hogy létezik $g \in G$, amelyre $X = Dg$.

Térjünk át $\text{GF}(p)[G]$ csoportgyűrűre, vagyis az együtthatókat tekintsük modulo p . Nézzük a \bar{D}^p csoportgyűrűben értelmezett hatványt, ebben a kifejezésben bármely a_i -re $a_i^p \equiv a_i \pmod{p}$, tehát $\bar{D}^p = \bar{D}^{(p)}$. Így a következő kifejezést átalakíthatjuk: $\bar{X}\bar{D}^{(-1)} = \bar{D}^{(p)}\bar{D}^{(-1)} = \bar{D}^p\bar{D}^{(-1)}$. Ha ebből kiemelek egy tényezőt azt kapom, hogy $\bar{D}^{p-1}(\bar{D}\bar{D}^{(-1)})$. A zárójeles kifejezést már láttuk, hogy $\lambda\bar{G} + (k - \lambda)1$ kifejezéssel egyenlő, ami viszont modulo p éppen $\lambda\bar{G}$ -vel egyenlő, hiszen p osztója a $n = k - \lambda$ -nak. Így végül arra jutottunk, hogy $\bar{X}\bar{D}^{(-1)} = \lambda\bar{D}^{p-1}\bar{G}$.

Ahhoz, hogy ezt tovább tudjuk egyszerűsíteni, nézzük meg, hogyan tudunk egy csoportgyűrűbeli elemet megszorozni a \bar{G} -sal. Legyen $A = \sum_{i=1}^v a_i g_i$ és tudjuk, hogy $\bar{G} = \sum_{i=1}^v g_i$. Ekkor a szorzatuk:

$$\begin{aligned} A \circ \bar{G} &= (a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots + a_v g_v) \circ (g_1 + g_2 + \dots + g_v) = \\ &= a_1(g_1 \times g_1) + a_1(g_1 \times g_2) + \dots + a_1(g_1 \times g_v) + a_2(g_2 \times g_1) + a_2(g_2 \times g_2) + \dots \\ &+ a_2(g_2 \times g_v) + \dots + a_v(g_v \times g_1) + a_v(g_v \times g_2) + \dots + a_v(g_v \times g_v) = \\ &= \sum_{i=1}^v a_i \cdot \sum_{j=1}^v g_i \times g_j = \sum_{i=1}^v a_i \cdot \sum_{j=1}^v g_k = (a_1 + a_2 + \dots + a_v)\bar{G} \end{aligned}$$

A \bar{D} elemet is írhatjuk olyan alakban, mint A -t, mégpedig úgy, hogy $a_i = 1$, ha $g_i \in D$, különben $a_i = 0$, és éppen k darab lesz 1, a többi 0. Így ez és a fenti alapján

$$\bar{D}\bar{G} = (a_1 + \dots + a_v)\bar{G} = k\bar{G}.$$

Ezt újra megismételve

$$\bar{D}^2\bar{G} = (a_1 + \dots + a_v)k\bar{G} = k^2\bar{G}.$$

Így folytatva végül $\bar{D}^{p-1}\bar{G} = k^{p-1}\bar{G}$. A p prím nem osztója a k -nak, így a kis Fermat tétel alapján $k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Tehát a korábbi egyenlőséget folytatva $\bar{X}\bar{D}^{(-1)} = \lambda\bar{D}^{p-1}\bar{G} = \lambda\bar{G}$. Most térjünk vissza a $\mathbb{Z}[G]$ csoportgyűrűre, a kapott eredmény itt azt jelenti, hogy minden $\bar{X}\bar{D}^{(-1)}$ -ben minden együttható legalább λ , hiszen minden együttható pozitív, modulo p értéke legfeljebb λ , és $p > \lambda$.

Belátom, hogy ebből következik az, hogy X minden blokkot legalább λ pontban metsz. Vizsgáljuk meg $\bar{X}\bar{D}^{(-1)}$ -ben a $g \in G$ elem együtthatóját. Ez éppen azt számolja, hogy hányszor áll

elő g elem xd^{-1} alakban, ahol $x \in X$, $d \in D$. Ezeknek a száma pedig éppen az X és Dg metszetének a mérete, azaz $|X \cap Dg|$. Előbb peddig azt láttuk, hogy minden g -nek az együtthatja legalább λ , vagyis ez azt jelenti, hogy X minden blokkot legalább λ pontban metsz.

Azt állítom, ha ez teljesül, vagyis hogy egy (v, k, λ) -blokkrendszerben egy k pontú S pont-halmaz minden blokkot legalább λ pontban metsz, akkor maga is blokk.

Ennek igazolásához először azt kell látni, hogy van olyan blokk, amellyel több mint λ közös pontja van S -nek. Ha nem lenne, azaz minden blokkot pontosan λ pontban metsz, akkor egy $x \in S$ pontra számoljuk meg azokat a (y, B) párokat, ahol $x \in B$, $x \neq y$, $y \in S \cap B$. Egyrészt S -nek x -en kívül $k - 1$ pontja van és ezek külön-külön az x -szel mind λ blokkhoz illeszkednek, azaz a párok száma $\lambda(k - 1)$. Másrészt minden x -et tartalmazó B blokknak k eleme van és mivel $|S \cap B| = \lambda$, így az x -en kívül $\lambda - 1$ közös pontjuk van, így a párok száma $k(\lambda - 1)$. Azaz $\lambda(k - 1) = k(\lambda - 1)$, amiből adódna, hogy $k = \lambda$, ami persze lehetetlen.

Vegyük azt a B blokkot, mellyel a legtöbb közös pontja van S -nek. Ekkor az előző miatt $|S \cap B| > \lambda$. A cél belátni, hogy $S = B$. Indirekt felteszem, hogy $S \neq B$ és legyen $x \in B \setminus S$. Számoljuk meg kétféleképpen a (p, B') párokat, ahol $p \in S \cap B'$, $x \in B'$, $B' \neq B$. Egyrészt k -féle p -t választhatnánk és ekkor az x, p pontokon át λ blokk megy át, azaz $k\lambda$ pár lenne, viszont ebben benne van az is, hogy $B' = B$. Tehát a $p \in B$ esetekben egy-egy blokkot le kell vonni, ez pedig éppen $|S \cap B| > \lambda$. Tehát azt kaptuk, hogy kevesebb pár van, mint $k\lambda - \lambda = (k - 1)\lambda$. Másik megszámlálásnál induljunk ki B' -ből, x -et k blokk tartalmazza, egy a B , így B' $(k - 1)$ blokk lehet. Ekkor $P \in S \cap B'$ és $|S \cap B'| \geq \lambda$, tehát legalább λ darab P választható B' -höz. Így összevetve $(k - 1)\lambda > \lambda(k - 1)$, ami viszont ellentmondás, vagyis $S = B$, tehát S is blokk.

Ezzel beláttuk, hogy $X = D + g$ valamely $g \in G$ -ra maga is blokk, azaz p multiplikátor. ■

6. Möbius-síkok

Ebben a fejezetben definiálom a *Möbius-síkot* vagy másnéven *inverzív síkot* és röviden bemutatom, hogyan kapjuk meg a Møbee játékot, amelynél bármely 3 kártyát véve pontosan 1 azonos szimbólum található. A fejezethez Kiss és Szőnyi könyvének [22] 9. és 10. fejezetét, valamint Dembowski könyvének [6] 1. és 6. fejezetét használtam fel.

Dolgozatomban a hangsúly inkább a $t = 2$ -rendszeren van, amilyen játékokat a programommal is lehet készíteni. A Möbius-síkok 3-rendszerek, így csak az érdekesség miatt összefoglalom, hogyan kaphatunk ilyen síkokat, további részletekért a felhasznált könyvet ajánlom.

6.1.1. Definíció. [22, 10.26. definíció]

Legyen \mathcal{P} és \mathcal{K} két diszjunkt halmaz, melyeknek elemeit pontoknak, illetve köröknek nevezzük és köztük egy \in illeszkedési reláció. Az $\mathcal{M} = (\mathcal{P}, \mathcal{K}, \in)$ hármast *Möbius-síknak* nevezzük, ha teljesül az alábbi három axióma:

1. \mathcal{P} bármely három különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van \mathcal{K} -nak, amelyik mindhárommal illeszkedik. Ez azt jelenti, hogy három különböző pont egyértelműen meghatároz egy kört.
2. Minden $(P, P', k) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{K}$ olyan hármashoz, melyre $P \in k$, $P' \notin k$, pontosan egy olyan k' kör létezik, melyre $P \in k'$, $P' \in k'$ és $|k \cap k'| = 1$ teljesül. Azaz adott k körhöz, egy P pontjához és egy P' külső ponthoz egyértelműen létezik egy k' kör, melyre a két kör a P pontban érintik egymást és k' átmegy P' ponton.
3. Létezik négy olyan pont, melyek nincsenek egy körön.

6.1.2. Példa. Legegyszerűbb példa, ha tekintünk az euklidészi térben egy gömbfelszínt, ekkor ennek pontjai és a gömbön lévő körvonalak Möbius-síkot alkotnak.

1. Bármely három pontot vesszük a gömbön nem lesznek kollineárisak, így meghatároznak egy síkot, amelynek a gömbfelszínnel vett metszete éppen egy kör lesz.
2. Ha adott k kör és $P \in k$ pont, akkor pontosan azok a körök érintik P -ben a k kört, amelyeknek síkja ugyanabban az e egyenesben metszi a k P -beli érintősíkját, mint a k -t tartalmazó sík. Ekkor az érintősík és a k -t tartalmazó sík egyértelmű, tehát meghatározzák az e egyenest. Ha adott egy $P' \notin k$ pont, akkor e -re sem illeszkedik a P' így meghatároznak egy síkot, amelyre teljesül az előbbi feltétel. Így ennek a síknak a gömbfelszínnel vett metszete éppen a keresett k' kör.
3. A harmadik axióma teljesülése triviális.

A kártyajátékok esetén a véges Möbius-síkokra van szükségünk. Így az euklideszi tér helyett egy véges projektív teret, a gömb helyett pedig egy véges ovoidot tekintünk, ami valójában az előző példa általánosítása [22, 10.27. Példa].

Vázlatosan definiálom $PG(3, q)$ -t. $PG(3, q)$ projektív tér $GF(q)$ felett. Ugyanúgy levezethető a homogén koordinátázása, mint a projektív síkoknál tettem, annyi különbséggel, hogy 4 koordinátából állnak. Vagyis a $q^3 + q^2 + q + 1$ projektív pont alakjai: $(x : y : z : 1)$, $(x : y : 1 : 0)$, $(x : 1 : 0 : 0)$, $(1 : 0 : 0 : 0)$, ahol $x, y, z \in GF(q)$. A projektív tér síkjait is hasonlóan leírhatjuk, mint korábban a projektív sík esetén az egyeneseket, vagyis a síkokat meghatározzák a normálvektorai, az ezekre merőleges vektorok koordinátaival kapjuk meg a sík homogén koordinátáit, amelyek normálás után $[x : y : z : 1]$, $[x : y : 1 : 0]$, $[x : 1 : 0 : 0]$, $[1 : 0 : 0 : 0]$ alakúak, ahol $x, y, z \in GF(q)$. A projektív tér egyenesei pedig két különböző sík metszeteként előálló ponthalmazok.

6.1.3. Definíció. [22, 9.1., 9.3. definíciók]

A $PG(n, q)$ azon ponthalmazát, melynek nincs három egy egyenesen lévő pontja *süvegnek* nevezzük.

A $PG(3, q)$, vagyis a q -adrendű projektív tér esetén, a $q^2 + 1$ pontú süveget *ovoidnak* nevezzük és \mathcal{O} -val jelöljük.

Valójában egy süvegnek $PG(3, q)$ -ban legfeljebb $q^2 + 1$ pontja lehet, vagyis a legnagyobbakat hívjuk ovoidoknak. Az ovoidok olyan tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a gömbök az euklideszi térbe, csak véges testben. Az ovoidok $PG(3, q)$ -ban leírhatók egyenletekkel, alábbi alakban.

$$X_0X_1 + X_2X_3 + \dots + X_{n-3}X_{n-2} + f(X_{n-1}X_n),$$

ahol f egy irreducibilis homogén másodfokú polinom. [23, Definition 4.47] Mi olyan polinomokat keresünk, amelyekkel érdemes játékot készíteni. Nézzük a $f(Z, W)$ kétváltozós homogén másodfokú irreducibilis polinomokat, vagyis azokat, amelyek nem állnak elő két elsőfokú polinom szorzataként (például ha q páros prímszám, akkor $Z^2 + W^2$ nem jó, hiszen $(Z + W)^2 = Z^2 + W^2$).

Az irreducibilitás ellenőrizhető úgy, hogy például ha $Z^2 + W^2 = (Z + aW)(Z + bW) = Z^2 + (a + b)ZW + abW^2$, akkor a kérdés, hogy van-e olyan a és b elem a testben, hogy $a + b = 0$ és $ab = 1$. Ha q páros, akkor $a = b = 1$ esetén teljesül. Ha q páratlan, akkor $b = -a$ felhasználásával azt kapjuk, hogy $-b^2 = 1$, vagyis $b^2 = -1$, amiről tudjuk, hogy pontosan akkor lesz négyzetszám, ha $q \equiv 1 \pmod{4}$. Tehát a $q \equiv 3 \pmod{4}$ esetén jó választás az $f(Z, W) = Z^2 + W^2$.

Próbálkozzunk $Z^2 + eW^2$ formában keresni a megfelelő polinomokat. Ekkor ha szétbomlik

polinomok szorzatára, akkor $a + b = 0$, $ab = e$ teljesül. Ha a testben van olyan e elem, melyre ez nem teljesül, akkor jó lesz a polinom. Ekkor $-a^2 = e$ összefüggést kapjuk, azaz a kérdés, hogy $-e$ négyzetszám-e. Ha q páratlan, akkor mindig van megfelelő e elem a testben.

Végül a páros q esete maradt. Ekkor próbálkozzunk $Z^2 + ZW + eW$ alakban. Ekkor azt kell vizsgálni, hogy vannak-e olyan elemek, amelyekre $a + b = 1$ és $ab = e$, vagyis $a(1 - a) = e$, amiből $a^2 - a + e = 0$. Ha q páros, akkor $-a = a$. Így tekintsük az $x^2 + x + e = 0$ polinomot, és ehhez kellene egy olyan e , amelyre ennek a polinomnak nincsen gyöke. Ilyen pedig minden esetben található.

Tekintsük az \mathcal{O} ovoid a $PG(3, q)$ térben, valamint ezeknek síkokkal vett azon metszeteit, amelyek nem egypontúak. Az euklideszi térhez hasonlóan ezek körszerű ponthalmazok lesznek, melyeknek $q + 1$ pontja van a projektív síkban, és ezekre is fennáll, hogy semelyik 3 pont nem esik egy egyenesre. Ezeket *oválisnak* nevezzük. Az így kapott rendszerre teljesülnek a Möbius-sík axiómái, vagyis pontjai az \mathcal{O} pontjai és körei az oválisok.

Tehát az \mathcal{O} ovoidból konstruáltunk egy Möbius síkot, melynek rendje $n = q$. A következő tétellel meghatározzuk az n -edrendű Möbius-sík paramétereit, amely segítségével már meg tudjuk határozni a kártyapaklik méretét, és a kártyákon szereplő szimbólumok számát.

6.1.4. Tétel. [22, 10.34. tétel]

Ha egy véges Möbius-síknak van olyan köre, amelyre $n + 1$ pont illeszkedik, akkor

- *a síknak $n^2 + 1$ pontja van,*
- *minden körnek $n + 1$ pontja van,*
- *minden ponton $n(n + 1)$ kör megy át,*
- *a síkon $n(n^2 + 1)$ kör van.*

Az n számot nevezzük a Möbius-sík rendjének.

Ebből már könnyen látható, hogy az n -edrendű Möbius-sík éppen egy $3 - (n^2 + 1, n + 1, 1)$ -rendszer. Hiszen $n^2 + 1$ pontja van, minden körnek $n + 1$ pontja, azaz mondhatjuk $(n + 1)$ -uniformnak és végül a 6.1.1. definíció alapján bármely 3 pont pontosan 1 körhöz illeszkedik.

Már korábban említettem, hogy a Möbius-síkok duálisára van szükségünk a játékok esetén, hiszen azt szeretnénk, ha bármely 3 kártyán 1 közös szimbólum lenne. Azaz a Möbius-sík pontjait tekintjük a kártyáknak, és a köreit pedig a szimbólumoknak. Ez alapján összefoglalom a lehetséges kártyajátékok paramétereit, amelyekkel a Møbee kártyák is készültek. Jelölje v a pontok számát, r a pontok fokát és b a körök számát.

n	v	r	b
3	10	12	30
4	17	20	58
5	26	30	130

Röviden összefoglalom a konstrukciót, viszonylag sok számolással jár, de egy program segítségével gyorsan megtalálható az adott rendű Möbius-sík. Tekintsük a $\text{PG}(3, q)$ projektív teret és \mathcal{O} ovoidot. Vegyük azokat a pontokat, amelyeknek homogén koordinátái kielégítik az \mathcal{O} ovoid egyenletét. Ezek lesznek a Möbius sík pontjai, $q^2 + 1$ darab. Ezután venni kell azon síkokat, amelyeknek pontosan $q + 1$ közös pontja van az ovoiddal. Ezekből összesen $q(q^2 + 1)$ darab lesz, ezek lesznek a Möbius-sík körei. Ezután felírható az illeszkedési mátrixuk, vagyis a sorok jelölnék egy-egy pontot és az oszlopok a köröket. Ha az adott körre illeszkedik a pont, akkor 1-est írunk, különben 0-t. Majd ebből az illeszkedési mátrixból a 2.3 alfejezetben látott módon elkészíthetők a kártyák.

7. A kártyagenerátor felhasználása a gyakorlatban

Ebben a fejezetben röviden összefoglalom mik lehetnek az előnyei, ha játékosan tanítjuk a gyerekeket. Bemutatom, miért készítettem el a kártyagenerátoromat és milyen felhasználási javaslataim vannak hozzá. Végül beszámolok az első tapasztalataimról, hogyan fogadták a tanulók az első paklikat, mekkora kihívást jelentett számukra. A szakirodalmi áttekintéshez felhasználtam *Huotari* és *Hamari* cikkét [11], *McGonigal* könyvének [18] *Introduction*, 1., 2. és 6. fejezetét, *Csíkszentmihályi* könyvének [5] 1. és 4. fejezetét, *Kapp* könyvének [12] *Preface*, 1. és 4. fejezetét.

7.1. Játékosítás

Kezdő tanárként nagyon fontosnak tartom, hogy a gyerekeket ráébresszem arra, hogy a matematika nagyon izgalmas és szép tud lenni, ehhez azonban stabil alapokra van szükség. Próbálok minden órára bevinni valami rövid játékos feladatot, főleg a kisebbeknél, amivel ismétlünk vagy gyakoroljuk az új anyagot. Ezáltal úgy érzem sokkal motiváltabbak és lelkesebbek a matematika tanulása iránt. Vajon miért van ez így?

A *játékosítás* előnyeit az oktatásban sok kutatásban vizsgálják és számos eredmény áll a rendelkezésünkre. *Huotari* úgy definiálja, hogy „a játékosítás az a folyamat, amely egy tevékenységet játékszerű élmények lehetőségeivel egészíti ki annak érdekében, hogy elősegítse a felhasználó értékalkotását” [11]. Vagyis az egyik lényeges szempont, hogy élményként éljék meg a diákok a tanulást, hiszen ennek számos pozitív következménye lehet.

McGonigal kutatásaiban azzal foglalkozott, hogyan lehetne az életünkbe átvinni azt az örömet és izgalmat, melyet játék során érzünk. Azt tapasztalta, hogy akik sokat játszanak, azoknak fejlett a kritikus gondolkodásuk és a problémamegoldó képességük. Ezáltal, ha egy nehezebb feladattal találják szembe magukat, nem megijednek, hanem legyőzendő kihívásnak tekintik. A gyakorlott játékosok így ellenállóbbak, rugalmasabbak az élet más területein is.

Arról is beszámol, hogy van olyan diák, akit nagyon motivál a versengés, azonban van akiből túlzott stresszt vált ki. Ezért is nagyon fontos, hogyan építjük be a játékokat a tanórákba. Olyan játékokat is érdemes alkalmazni, amelyek során egy közös célért kell együttműködni, így a játék egy közösségi élménnyé válhat. [18]

Csíkszentmihályi szerint elengedhetetlen a boldogsághoz a *flow-élmény*, vagyis „az a jelenség, amikor annyira feloldódunk egy tevékenységben, hogy minden más eltörlődik mellette, az élmény maga lesz olyan élvezetes, hogy a tevékenységet bármi áron folytatni akarjuk...” [5] Ehhez az oktatásban arra van szükség, hogy a tanulók képességei, tudásuk egyensúlyban legyenek a kihívások nehézségi szintjével. Ha ez teljesül, akkor az élmény által nő az önbizalom és a belső motiváció, melyek pedig hozzájárulnak a jobb teljesítményhez.

Kapp a könyvében, mely a tanulás játékosításáról szól, leírja, hogy a játékos tanulási környezet biztonságos teret nyújt a kreatív gondolkodásnak azáltal, hogy szabad hibázni, nincsen „büntetés”. Szerinte a cél, hogy a tanulók élvezzék a tanulást, bevonódjanak, ezáltal motiváltak lesznek és elérhetjük a pozitív tanulási eredményeket. [12]

A Dobble nagyon népszerű a gyerekek körében, de vajon hogyan hat rájuk, mennyire fejleszti a kognitív képességeiket? A játék hatásáról kevés kutatás készült, inkább pozitív tapasztalatok olvashatók cikkekben tanároktól. Egy kutatás során megvizsgálták, hogyan hat óvodásokra, ha heti rendszerességgel játszanak Dobble-t [24]. Számos mérést végeztek rajtuk, valamint a kontrollcsoporton és arra jutottak, hogy számos kompetencia területen fejlődtek a gyerekek. Egyaránt javult a rövid és hosszú távú memória, valamint a vizuális memória. A feladatok során gyorsabban dolgoztak, tovább fent maradt a figyelmük és kevesebb hibát is vétettek.

Természetesen az iskolában nagyobb gyerekeknél nem várható ilyen szintű fejlődés, de gyakori probléma a lassúság, a figyelmetlenség, kimondottan a tanulási nehézségekkel küzdő gyerekeknél, így a nagyobb korosztálynak is hasznos lehet.

7.2. Ötletek, tapasztalatok

A *DobGen* weboldalon elérhető a kártyajáték készítő programom, melyet szeretnék röviden bemutatni. A célja, hogy a pedagógusok viszonylag egyszerűen és (a nyomtatási költségeket leszámítva) ingyen tudjanak saját Dobble-típusú játékokat készíteni és ezzel színesítsék a tanulást. A korábban említett pozitív hatásokon kívül egy jól elkészített pakli segítségével a diákok feleleveníthetnek korábbi ismereteket, valamint elsajátíthatják és gyakorolhatják az új tananyagot.

Készíthető vele egyedi Dobble, illetve Gemini játék. A felhasználó választja ki, hány szimbólumot szeretne egy kártyára, persze a későbbiekben látjuk majd, hogy ez nem lehet bármennyi, a Dobble esetén 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 és 12, a Gemini esetén pedig 9, 11, 13 értékek lehetségesek. Ezáltal számos nehézségi szintű játék készíthető. A szimbólumok lehetnek képek, rövid szövegek, vagy matematikai kifejezések, amelyeket latex kóddal tudunk megadni. Továbbá szerintem a legjobb funkciója, hogy egy szimbólumnak lehetnek különböző megjelenései. Ez azt jelenti, hogy az eredeti Dobble-ban például a szív szimbólum megjelenik 8 kártyán, az egyedi pakliban a 8 kártyán megjelenhet különböző „kinézetben”. Például egy matekos pakliban a 12 megjelenhet úgy, hogy $5 + 7$, $3 \cdot 4$, így tovább és két kártyán az egyenlőket kell keresni.

Egy latex fájl fordításával készülnek el minden alkalommal a pdf állományok, amely a kártyákat tartalmazza. Ahhoz, hogy ez a fájl megkapja a megfelelő információkat jó néhány programot meg kellett írnom. Szükség volt a projektív síkok homogén koordinátáinak kigenerálására, majd a pontok és egyenesek illeszkedését megvizsgálni, és végül eltároltam, mely blokkok mely pontokat tartalmazzák, így ezt nem végzi el minden alkalommal a program. A projekt-

ív síkok esetén arra is szükség volt, hogy véges testekben is tudjon számolni a program. A bisíkokat pedig a korábban említett automorfizmusok alapján generáltam ki, így szükség volt egy programra, amely ezekre képes. Ezek után a felhasználó választásai alapján, a megfelelő, eltárolt adatok szerint, sorra átadja a program a latex fájlak a szimbólumok neveit.

A kör alakú kártyán a szimbólumokat körökben helyezem el, így elkerülhető az átfedés, valamint viszonylag jól kitölti a kártyát, ehhez a lehető legjobb elhelyezéseket *Erich Friedman* weboldalán [16] találtam, a képekről olvastam le a koordinátákat. További célom ezzel az volt, hogy így a szimbólumok tetszőleges irányba forgathatók, tehát ha körbe állják a gyerekek a kártyákat, senkinek sem lesz könnyebb, azáltal, hogy minden képlet „felé néz”. A program minden szimbólumot véletlenszerű irányban helyezi a kártyára.

A program fejleszthető lenne azzal, hogy különböző megjelenés esetén a szimbólumokat és kártyákat páros gráfként tárolja a program és ezeken a teljes párosítások határoznák meg, hogy egy szimbólum mely alakja, mely kártyára kerüljön. Ezáltal egy kártyára különböző alakok kerülnének, vagyis például a törtes kártyapaklinál (A.3. melléklet) nem fordulna elő az, hogy egy kártyára csak ábrák kerülnének, hanem minden alakból lenne egy darab.

Természetesen ez sem egy varázseszköz, nem alkalmas minden témához és bármely tanulócsoporthoz. Másrészt egy-egy pakli elkészítése időt igényel, így érdemes előre gondolkodni és korábban elkészíteni néhány témakörhöz a paklikat, amik viszont onnantól akárhányszor felhasználhatóak. A kártyajáték készítésének menete a weboldalon megtalálható és néhány legenerált példa is inspirációként.

Néhány ötletemet bemutatom a felhasználáshoz, természetesen matematikaszakosként a legtöbb ötletem matematika órához kapcsolódik, de szerintem sok másik tantárgyhoz is ki lehet találni hasznos kártyákat.

Matematika órán:

- Fejlesztés gyakorlására alpműveletek
- Törtek elmélyítéséhez tört egyszerűsített, bővített alakja, ábrázolása, tizedestört alakja
- Mértékegység átváltás
- Számok kerekítése: például azokat keressük, amelyeknek ugyanannyi a tizesre kerekített értéke
- Oszthatóság: ugyanannyi maradékot adnak egy adott számmal osztva
- Négyszögek: négyszögek kerülete, területe, ábrája
- Testek: élek, lapok, csúcsok száma, kerület, térfogat, ábra
- Algebra: egynemű kifejezések

- Hatványazonosságok: hatvány különböző alakban műveletekkel felírva
- Hatvány, gyök, logaritmus: számok hatványként, logaritmussal
- Koordináta geometria: merőleges vektorok keresése

Egyéb tantárgyak:

- Nyelvek: Szókincs fejlesztésre új szavak vegyesen képekkel
- Angol: rendhagyó igék különböző alakjai
- Történelem: évszámok, események, helyszínek, személyek, képek
- Nyelvtan: azonos szófajú szavak
- Földrajz: ország és nagyvárosai
- Biológia: állatok és egyedi jellemzőik

Túl sok tapasztalatot még nem gyűjtöttem az egyedi paklikkal, de az első benyomások egyértelműen pozitívak. Első alkalommal matematika szakkörön 5. és 6. évfolyamos tanulókkal próbáltunk ki három játékot 3-4 fős csoportokban, majd az itt szerzett tapasztalatok alapján egy 5. osztályos matematika órán ezt alkalmaztuk ráhangolódó feladatként.

Az elkészített kártyákon 4, illetve 5 szimbólum volt, mert úgy gondoltam, elsőre ez is kihívás lesz, és valóban így is volt. A legkönnyebbnek az alpműveleteket tartalmazó pakli bizonyult (megtalálható az A.1. mellékletben), azonban ez is nagy koncentrációt igényelt, így az elején viszonylag lassan ment a gyerekeknek, de végül sikerült ügyesen ráhangolódniuk a feladatra. A könnyebbség oka az is lehetett, hogy ez a pakli olyan téma gyakorlására készült, amely a szakkörön részt vevő tanulóknak már készség szinten beépült a tudásukba, hiszen ezeken a kártyákon csak százas számkörben végzendő műveletek szerepeltek. A pozitív tapasztalatnak köszönhetően ezt a paklit változtatások nélkül vittem be az ötödikes matematika órára, ügyelve arra, hogy mindenkinek lehetősége legyen sikerélményhez jutnia, 4 fős homogén képességű csoportokba osztottam a tanulókat. A gyerekek nagyon élvezték a kihívást, a játék elfeledtette velük, hogy a máskor oly unalmas fejszámolást gyakoroljuk általa. Megfigyelhető volt, hogy a figyelemzavaros, valamint a gyengébb számolási készséggel rendelkező tanulók nagyon lassan haladtak, ezért a kártyák szerkesztésénél jobban oda kell figyelni a differenciálásra. Számukra egyelőre elegendő lenne egy kártyára 4 művelet megjelenítése. A játék rendszeres alkalmazása remélhetőleg náluk is komoly fejlődést eredményez a figyelem koncentráció területén.

A második pakli segítségével a mértékegység átváltást gyakorolhatták a tanulók (az A.2. mellékletben található). Ezt csak szakköri kereten belül próbáltuk ki. A könnyebb átláthatóság miatt ezeken a kártyákon egy-egy mennyiség csak 4 különböző alakban jelent meg. Ez

könnyebben ment a tanulóknak, mint vártam, azonban itt volt a legtöbb hibázás is, mivel a tanulók leginkább a számjegyekre koncentráltak, nem az egész mennyiségre. Így azonban jobban odafigyeltek egymás válaszára is, mindig megvitatták, hogy valóban helyes-e a megoldás. Ez szerintem nagyon hasznos volt, főleg az ötödikeseknek, akik ebben a tanévben még nem tanulták ezt a témakört. Szépen letisztult nekik a mérőszámok és mértékegységek közötti kapcsolat, hogy mekkorák a váltószámok.

A harmadik játék bizonyult a legnehezebbnek. Ebben törtek egyszerűsített és bővített alakja, tizedestört alakja és körcikkkel való ábrázolása volt egyszerre jelen (megtalálható az A.3. mellékletben). Egy kártyán 5 tört szerepelt. A szakkörön a feladat nehézsége ellenére a gyerekek nagyon ügyesen, kitartóan végigjátszották a paklit. Ami egyértelműen látszódott, hogy a játék végére szépen letisztult nekik a témakör. A játék lehetőséget adott a racionális számok különböző alakja közötti összefüggések felismerésére. Mivel a szakkör résztvevőinek is kicsit nehéz volt a feladat, ezért az ötödikes matematika órára egy egyszerűsített paklit is készítettem a gyengébb matematikai készségekkel rendelkező tanulók számára. Ezeken a kártyákon minden törtnek csak 4 különböző alakja jelent meg (megtalálható az A.4. mellékletben). Egy olyan tanulói csoport volt, akiknek ennél a feladatnál így is tanári segítségre volt szükségük, a többiek szépen haladtak. Több tanulónak nehézséget okoznak a törtek és tizedestörtek, de a játék hevében rákényszerültek arra, hogy végre tudatosítsák mit jelent a nevező, mi a kapcsolata törtnek és tizedestörtnek. A gyerekek gyakorlatilag egymást is tanították azáltal, hogy elmagyarázták egymásnak, hogy miért gondolják egyezőnek az adott két elemet.

Mindhárom pakli használata során látszódott a játék játékos hatása a tanulói kompetenciák fejlődésére. Azon túl, hogy a gyerekek sokkal aktívabban vesznek részt általa a tanulási folyamatban, számos egyéb pozitív hatása mutatkozott meg. A játék teret adott a tanulók közötti kommunikációnak, a vitakészség fejlesztésének, lehetőséget nyújtott a matematika nyelvezetének gyakorlására, valamint az egymástól tanulás élményének megtapasztalására.

Az első próbálkozások alapján úgy gondolom, hasznos lehet időnként bevinni egy-egy ilyen játékot a tanórákra. Természetesen a pedagógus részéről komoly tervezőmunkát igényel az adott tanulócsoporthoz legjobban illő, a tananyagot legjobban elmélyítő és az időkeretbe beleférő paklik elkészítése, de a módszer rendszeres alkalmazása esetén várható fejlesztő hatás miatt megéri a fáradságot.

Hivatkozások

- [1] E. Assmus and J. Key. *Designs and their codes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [2] L. Babai and P. Frankl. *Linear algebra methods in combinatorics*. Chicago University Press, Chicago, 2.2 edition, 2022.
- [3] T. Beth, D. Jungnickel, and H. Lenz. *Design Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2 edition, 1999.
- [4] C. J. Colbourn and J. H. Dinitz. *Handbook of Combinatorial Designs*. Chapman and Hall/CRC, New York, 2 edition, 2007.
- [5] M. Csíkszentmihályi. *Flow - Az áramlat*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1997.
- [6] P. Dembowski. *Finite Geometries*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1997.
- [7] Dobble angol weboldala. URL <https://www.dobblegame.com/en/games/>. Utolsó meglekintés: 2025.02.15.
- [8] Dobble magyar weboldala. URL <https://www.dobble.hu/>. Utolsó meglekintés: 2025.02.15.
- [9] Dobgen weboldalam. URL <https://dobgen.ttk.elte.hu/>.
- [10] D. Hughes and F. Piper. *Design theory*. Cambridge University Press, New York, 2008.
- [11] K. Huotari and J. Hamari. A definition for gamification: anchoring gamification in the service marketing literature. *Electron Markets*, 2016.
- [12] K. M. Kapp. *The Gamification of Learning and Instruction: Game-Based Methods and Strategies for Training and Education*. Pfeiffer, San Francisco, 2012.
- [13] P. Kaski and P. R. J. Östergård. There are exactly five biplanes with $k = 11$. *Journal of Combinatorial Designs*, 2007.
- [14] E. Kiss. *Bevezetés az algebrába*. Typotex, Budapest, 2007.
- [15] Képek forrása. URL <https://www.freepik.com/>. Utolsó meglekintés: 2025.04.08.
- [16] Erich Friedman weboldala. URL <https://erich-friedman.github.io/packing/cirincir/>. Utolsó meglekintés: 2025.03.05.

- [17] C. W. H. Lam, L. Thiel, and S. Swiercz. The non-existence of finite projective planes of order 10. *Canadian Journal of Mathematics*, 1989.
- [18] J. McGonigal. *Reality Is Broken: Why Games Make Us Better and How They Can Change the World*. The Penguin Press, New York, 2011.
- [19] K. Metsch. *Linear Spaces with Few Lines*. Springer-Verlag, Hemsbach, 1991.
- [20] Møbee weboldala. URL <https://mobeecards.store/>. Utolsó megtekintés: 2025.04.10.
- [21] P. G. P. Packiavathi and R. B. G. Jothi. Some new results on Shrikhande graph. *Educational Administration: Theory and Practice*, 2024.
- [22] G. Kiss és T. Szőnyi. *Véges Geometriák*. Polygon, Szeged, 2001.
- [23] G. Kiss és T. Szőnyi. *Finite Geometries*. CRC Press, Boca Raton, 2020.
- [24] O. V. Rubtsova, Y. A. Tokarchuk, O. V. Salomatova, and E. V. Gavrilova. Association between memory and attention performance among preschoolers playing traditional and digital games (on the example of “dobble”). *Psychological Science and Education*, 2024.
- [25] Spot it! weboldala. URL <https://www.spotitgame.com/>. Utolsó megtekintés: 2025.02.15.
- [26] T. Szőnyi. Szimmetrikus struktúrák. Jegyzet, 2013.

Alulírott Molnár Kata nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

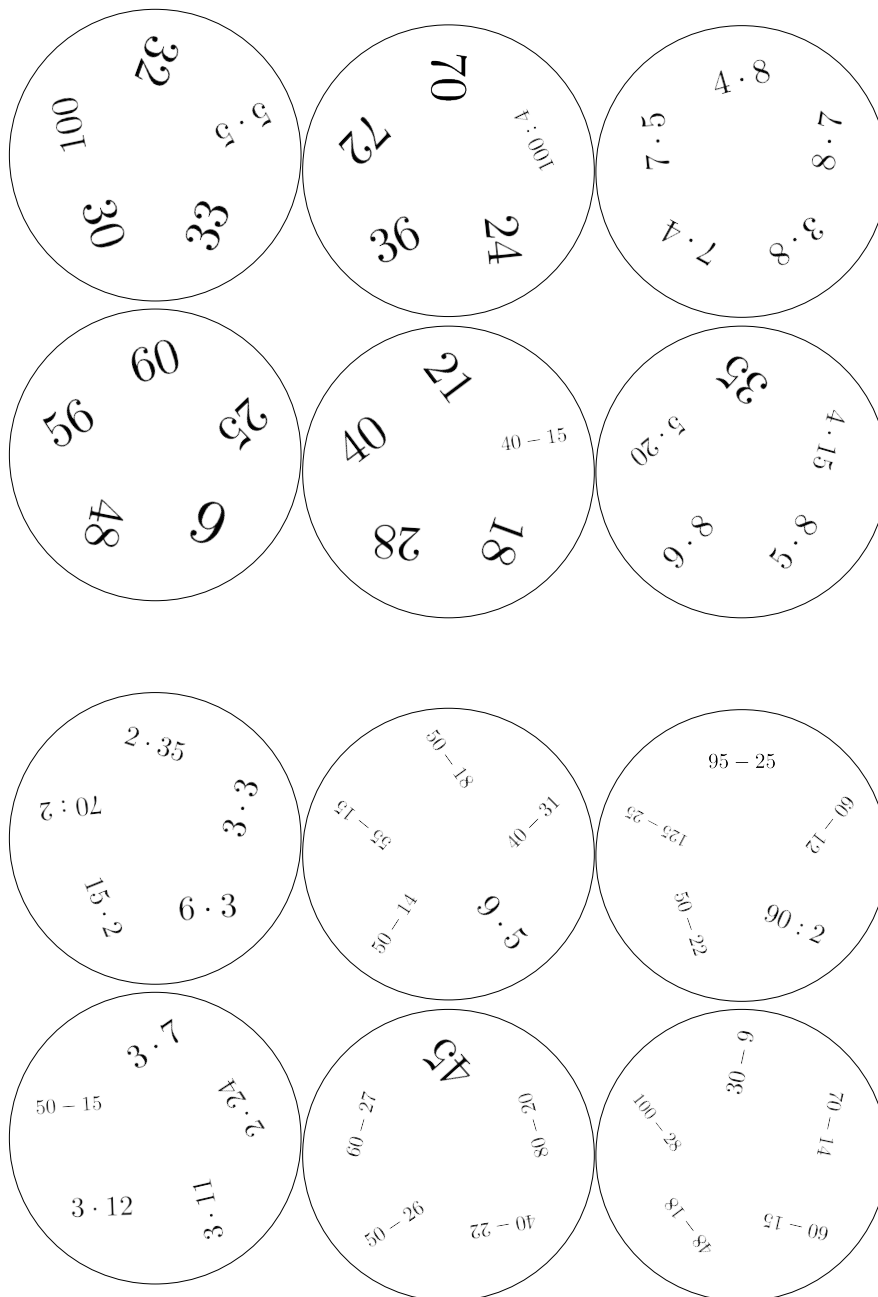
Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye	Megjegyzés
Névválasztás	GPT-4o	1. fejezet	A bisík alapú játék elnevezésére javaslatok
Irodalomkeresés	GPT-4o	5. és 6. fejezet	Differenciahalmazokhoz és Möbius-síkokhoz kértem szakirodalmi ajánlást
Releváns fejezetek keresése	GPT-4o	7. fejezet	A kiválasztott szakirodalmakból azon fejezetek kiválasztása, melyek a témámhoz szükségesek
Hibakeresés	GPT-4o	Program	A programomban kétszer kerestettem hibát

A felsoroltakon túl más MI alapú eszközt nem használtam.

A. Kipróbált kártyapaklik

A kártyákat a kártyagenerátorommal [9] készítettem.

A.1. Alapműveletek



$22 + 34$
 $9 + 9$
 $72 + 28$
 $21 + 15$
 $3 \cdot 4$

$140 : 2$
 $112 : 2$
 $120 : 3$
 $66 : 2$
 $2 : 091$

$96 : 2$
 $36 : 2$
 $10 \cdot 8$
 $7 : 79$
 $144 : 2$

12
 $12 + 13$
 $67 + 22$
 $45 + 35$
 $15 + 20$

$42 : 2$
 $54 : 6$
 $48 : 2$
 $500 : 5$
 $91 - 16$

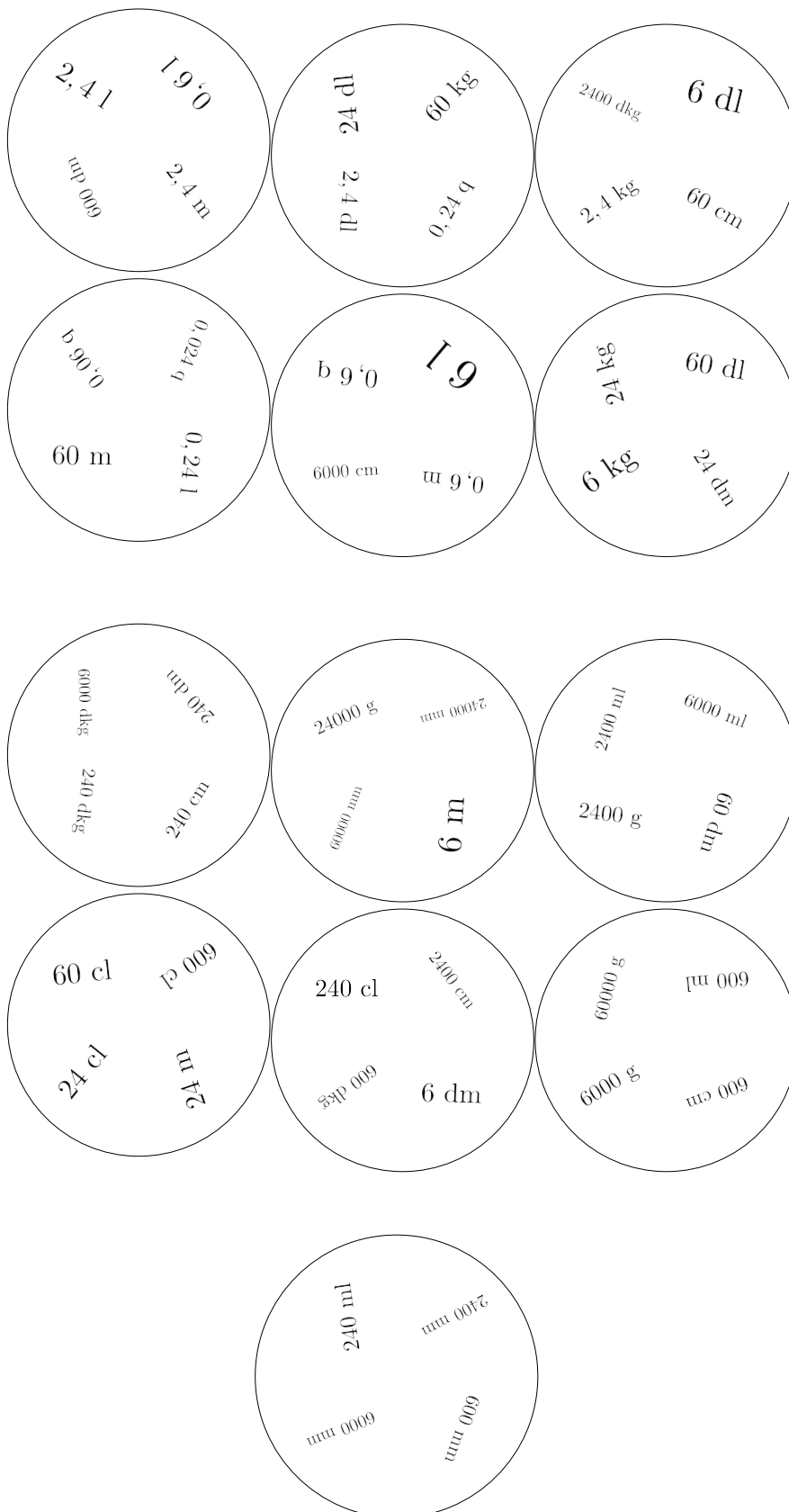
80
 $120 : 2$
 $36 : 2$
 $72 : 2$
 $90 : 6$

$3 : 96$
 $20 + 28$
 $11 + 13$
 $17 + 23$
 $18 + 12$

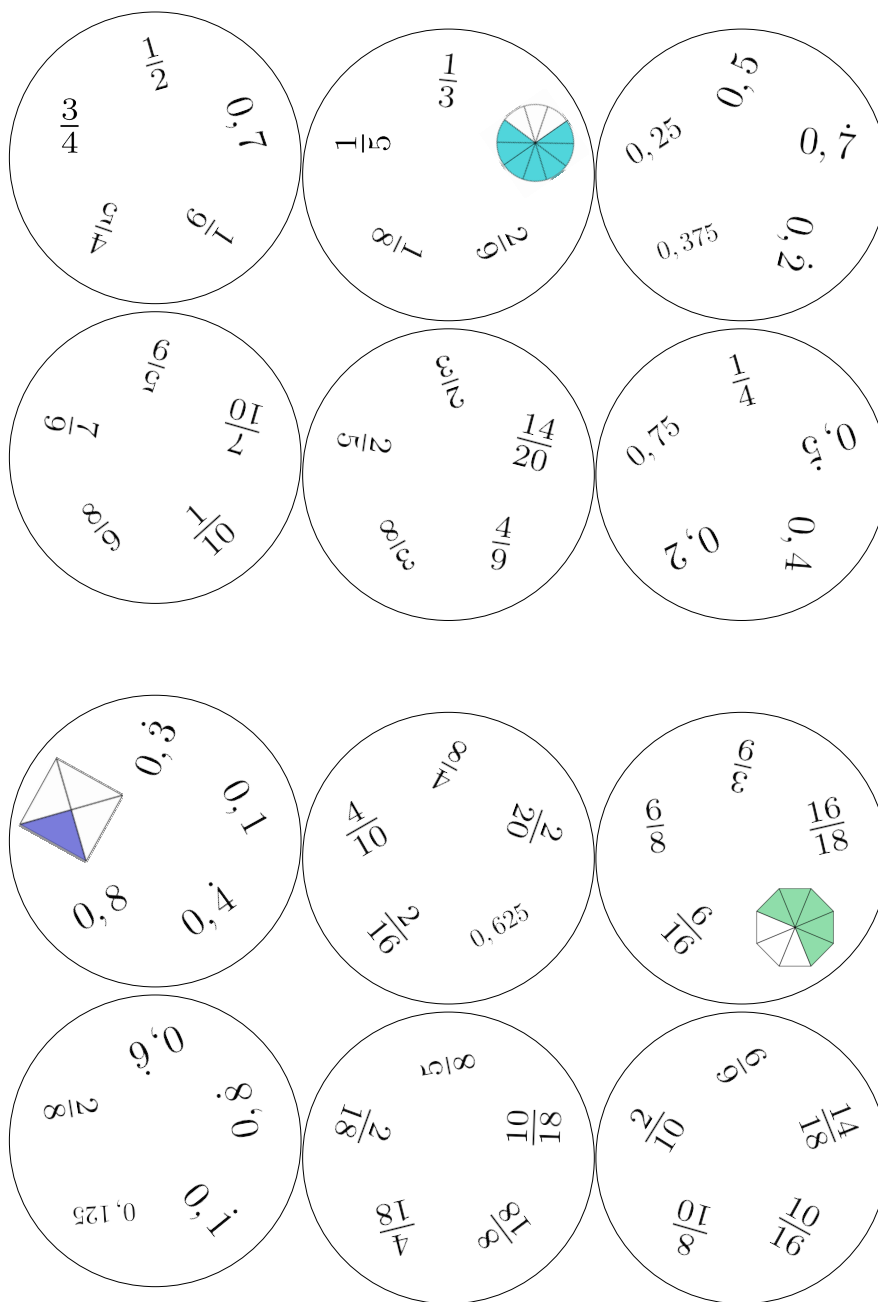
$82 - 06$
 $5 + 4$
 $40 + 32$
 $17 + 11$
 $51 + 81$

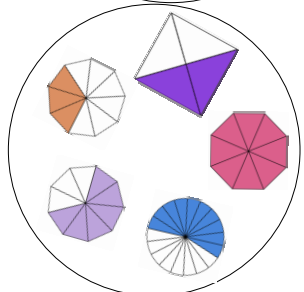
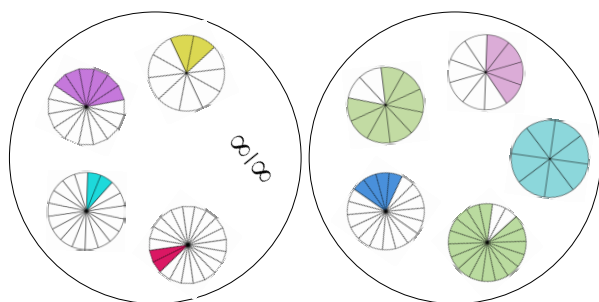
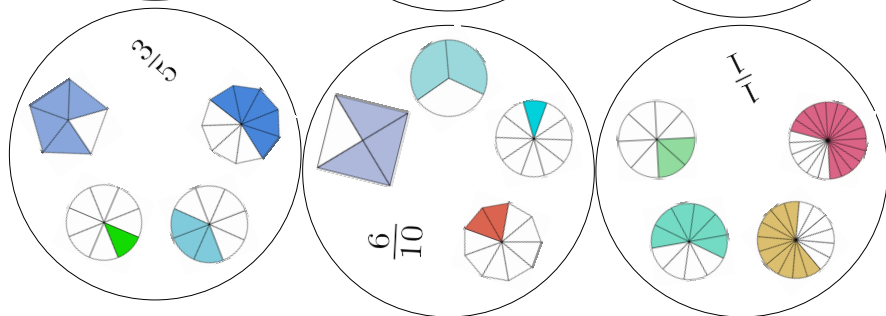
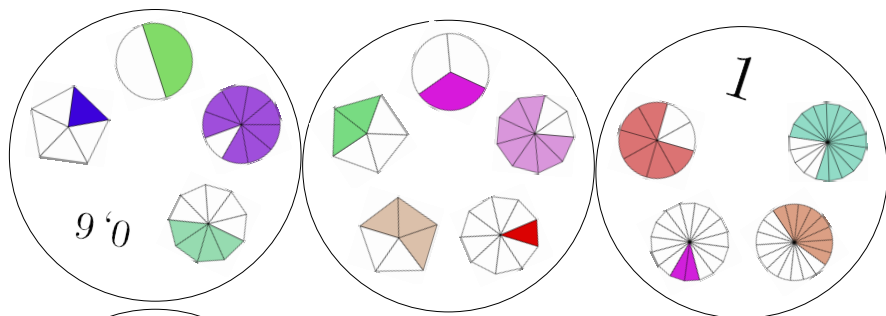
$7 + 5$
 $28 + 32$
 $12 + 9$
 $11 + 81$
 $28 + 42$

A.2. Mértékegységek

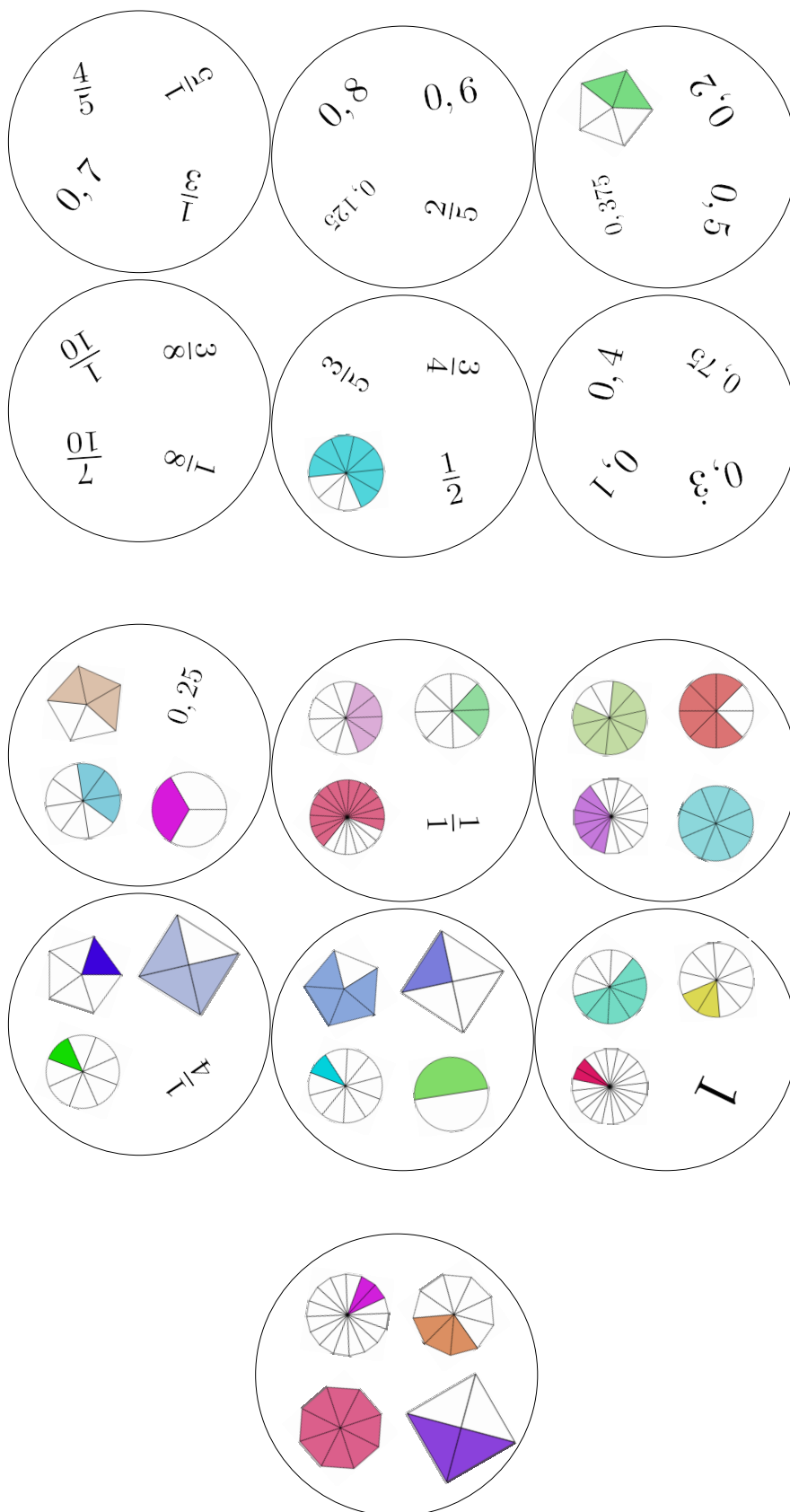


A.3. Törtek 5 szimbóllummal





A.4. Törtek 4 szimbólummal



B. Véges testek szorzótáblája prímszakra

B.1. GF(4)

\cdot	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	$x+1$	1
$x+1$	0	$x+1$	1	x

B.2. GF(8)

\cdot	0	1	x	$x+1$	x^2	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$	x^2	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
x	0	x	x^2	x^2+x	$x+1$	1	x^2+x+1	x^2+1
$x+1$	0	$x+1$	x^2+x	x^2+1	x^2+x+1	x^2	1	x
x^2	0	x^2	$x+1$	x^2+x+1	x^2+x	x	x^2+1	1
x^2+1	0	x^2+1	1	x^2	x	x^2+x+1	$x+1$	x^2+x
x^2+x	0	x^2+x	x^2+x+1	1	x^2+1	$x+1$	x	x^2
x^2+x+1	0	x^2+x+1	x^2+1	x	1	x^2+x	x^2	$x+1$

B.3. GF(9)

·	0	1	2	x	$x + 1$	$x + 2$	$2x$	$2x+1$	$2x+2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	x	$x + 1$	$x + 2$	$2x$	$2x+1$	$2x+2$
2	0	2	1	$2x$	$2x+2$	$2x+1$	x	$x + 2$	$x + 1$
x	0	x	$2x$	2	$x + 2$	$2x+2$	1	$x + 1$	$2x+1$
$x + 1$	0	$x + 1$	$2x+2$	$x + 2$	$2x$	1	$2x+1$	2	x
$x + 2$	0	$x + 2$	$2x+1$	$2x+2$	1	x	$x + 1$	$2x$	2
$2x$	0	$2x$	x	1	$2x+1$	$x + 1$	2	$2x+2$	$x + 2$
$2x+1$	0	$2x+1$	$x + 2$	$x + 1$	2	$2x$	$2x+2$	x	1
$2x+2$	0	$2x+2$	$x + 1$	$2x+1$	x	2	$x + 2$	1	0

C. Bisíkok generálása

C.1. $n = 7$

$$\mathbf{P} = \{0, 1, \dots, 36\}$$

$$B_1 = \{0, 6, 8, 9, 11, 15, 25, 32, 33\}$$

$$B_2 = \{1, 7, 9, 10, 12, 16, 26, 33, 34\}$$

$$B_3 = \{2, 8, 10, 11, 13, 17, 27, 34, 35\}$$

$$B_4 = \{3, 9, 11, 12, 14, 18, 28, 35, 36\}$$

$$B_5 = \{4, 10, 12, 13, 15, 19, 29, 36, 0\}$$

$$B_6 = \{5, 11, 13, 14, 16, 20, 30, 0, 1\}$$

$$B_7 = \{6, 12, 14, 15, 17, 21, 31, 1, 2\}$$

$$B_8 = \{7, 13, 15, 16, 18, 22, 32, 2, 3\}$$

$$B_9 = \{8, 14, 16, 17, 19, 23, 33, 3, 4\}$$

$$B_{10} = \{9, 15, 17, 18, 20, 24, 34, 4, 5\}$$

$$B_{11} = \{10, 16, 18, 19, 21, 25, 35, 5, 6\}$$

$$B_{12} = \{11, 17, 19, 20, 22, 26, 36, 6, 7\}$$

$$B_{13} = \{12, 18, 20, 21, 23, 27, 0, 7, 8\}$$

$$B_{14} = \{13, 19, 21, 22, 24, 28, 1, 8, 9\}$$

$$B_{15} = \{14, 20, 22, 23, 25, 29, 2, 9, 10\}$$

$$B_{16} = \{15, 21, 23, 24, 26, 30, 3, 10, 11\}$$

$$\begin{aligned}
B_{17} &= \{16, 22, 24, 25, 27, 31, 4, 11, 12\} & B_{28} &= \{27, 33, 35, 36, 1, 5, 15, 22, 23\} \\
B_{18} &= \{17, 23, 25, 26, 28, 32, 5, 12, 13\} & B_{29} &= \{28, 34, 36, 0, 2, 6, 16, 23, 24\} \\
B_{19} &= \{18, 24, 26, 27, 29, 33, 6, 13, 14\} & B_{30} &= \{29, 35, 0, 1, 3, 7, 17, 24, 25\} \\
B_{20} &= \{19, 25, 27, 28, 30, 34, 7, 14, 15\} & B_{31} &= \{30, 36, 1, 2, 4, 8, 18, 25, 26\} \\
B_{21} &= \{20, 26, 28, 29, 31, 35, 8, 15, 16\} & B_{32} &= \{31, 0, 2, 3, 5, 9, 19, 26, 27\} \\
B_{22} &= \{21, 27, 29, 30, 32, 36, 9, 16, 17\} & B_{33} &= \{32, 1, 3, 4, 6, 10, 20, 27, 28\} \\
B_{23} &= \{22, 28, 30, 31, 33, 0, 10, 17, 18\} & B_{34} &= \{33, 2, 4, 5, 7, 11, 21, 28, 29\} \\
B_{24} &= \{23, 29, 31, 32, 34, 1, 11, 18, 19\} & B_{35} &= \{34, 3, 5, 6, 8, 12, 22, 29, 30\} \\
B_{25} &= \{24, 30, 32, 33, 35, 2, 12, 19, 20\} & B_{36} &= \{35, 4, 6, 7, 9, 13, 23, 30, 31\} \\
B_{26} &= \{25, 31, 33, 34, 36, 3, 13, 20, 21\} & B_{37} &= \{36, 5, 7, 8, 10, 14, 24, 31, 32\} \\
B_{27} &= \{26, 32, 34, 35, 0, 4, 14, 21, 22\}
\end{aligned}$$

C.2. $n = 9$

$$\mathbf{P} = \{1_i, 2_i, 3_i, 4_i, 5_i, 6_i, 7_i, 8_i\} \quad i = 0, 1, \dots, 6$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{1_1, 2_2, 3_4, 4_1, 5_2, 6_4, 7_0, 7_3, 7_5, 7_6, 8_0\} & B_{23} &= \{1_1, 1_5, 2_1, 2_5, 3_2, 3_4, 4_2, 4_3, 4_4, 7_4, 8_2\} \\
B_2 &= \{1_2, 1_5, 2_2, 2_5, 3_1, 3_6, 4_0, 4_1, 4_6, 7_1, 8_6\} & B_{24} &= \{1_2, 1_6, 2_0, 2_1, 3_0, 3_1, 5_2, 5_4, 5_6, 7_6, 8_2\} \\
B_3 &= \{1_2, 2_3, 3_5, 4_2, 5_3, 6_5, 7_0, 7_1, 7_4, 7_6, 8_1\} & B_{25} &= \{1_4, 1_5, 1_6, 4_0, 4_3, 5_0, 5_3, 6_4, 6_6, 7_6, 8_4\} \\
B_4 &= \{1_6, 2_5, 3_3, 4_6, 5_5, 6_3, 7_0, 8_0, 8_1, 8_2, 8_4\} & B_{26} &= \{1_1, 1_5, 2_0, 2_6, 3_0, 3_6, 5_1, 5_3, 5_5, 7_5, 8_1\} \\
B_5 &= \{1_3, 1_6, 2_3, 2_6, 3_0, 3_2, 4_0, 4_1, 4_2, 7_2, 8_0\} & B_{27} &= \{1_3, 1_5, 2_0, 2_1, 3_3, 3_5, 6_0, 6_1, 6_4, 7_1, 8_0\} \\
B_6 &= \{1_2, 1_5, 2_3, 2_4, 3_3, 3_4, 5_0, 5_2, 5_5, 7_2, 8_5\} & B_{28} &= \{2_0, 2_3, 2_5, 4_0, 4_3, 5_1, 5_2, 6_1, 6_2, 7_0, 8_3\} \\
B_7 &= \{1_0, 1_1, 1_6, 4_2, 4_5, 5_2, 5_5, 6_1, 6_6, 7_1, 8_6\} & B_{29} &= \{1_1, 1_3, 2_5, 2_6, 3_1, 3_3, 6_2, 6_5, 6_6, 7_6, 8_5\} \\
B_8 &= \{1_3, 2_4, 3_6, 4_3, 5_4, 6_6, 7_0, 7_1, 7_2, 7_5, 8_2\} & B_{30} &= \{2_1, 2_4, 2_6, 4_1, 4_4, 5_2, 5_3, 6_2, 6_3, 7_1, 8_4\} \\
B_9 &= \{1_5, 2_4, 3_2, 4_5, 5_4, 6_2, 7_6, 8_0, 8_1, 8_3, 8_6\} & B_{31} &= \{1_0, 1_2, 2_4, 2_5, 3_0, 3_2, 6_1, 6_4, 6_5, 7_5, 8_4\} \\
B_{10} &= \{1_0, 2_6, 3_4, 4_0, 5_6, 6_4, 7_1, 8_1, 8_2, 8_3, 8_5\} & B_{32} &= \{3_0, 3_3, 3_4, 4_1, 4_6, 5_3, 5_4, 6_1, 6_6, 7_4, 8_3\} \\
B_{11} &= \{1_0, 1_4, 2_0, 2_4, 3_1, 3_3, 4_1, 4_2, 4_3, 7_3, 8_1\} & B_{33} &= \{2_1, 2_3, 2_6, 4_3, 4_6, 5_4, 5_5, 6_4, 6_5, 7_3, 8_6\} \\
B_{12} &= \{1_0, 1_4, 2_5, 2_6, 3_5, 3_6, 5_0, 5_2, 5_4, 7_4, 8_0\} & B_{34} &= \{1_1, 1_2, 1_3, 4_0, 4_4, 5_0, 5_4, 6_1, 6_3, 7_3, 8_1\} \\
B_{13} &= \{1_0, 1_5, 1_6, 4_1, 4_4, 5_1, 5_4, 6_0, 6_5, 7_0, 8_5\} & B_{35} &= \{2_0, 2_2, 2_4, 4_0, 4_4, 5_5, 5_6, 6_5, 6_6, 7_4, 8_0\} \\
B_{14} &= \{1_3, 1_6, 2_4, 2_5, 3_4, 3_5, 5_1, 5_3, 5_6, 7_3, 8_6\} & B_{36} &= \{1_1, 1_4, 2_1, 2_4, 3_0, 3_5, 4_0, 4_5, 4_6, 7_0, 8_5\} \\
B_{15} &= \{1_1, 1_6, 2_3, 2_4, 3_1, 3_6, 6_0, 6_3, 6_4, 7_4, 8_3\} & B_{37} &= \{1_3, 2_2, 3_0, 4_3, 5_2, 6_0, 7_4, 8_1, 8_4, 8_5, 8_6\} \\
B_{16} &= \{2_0, 2_2, 2_5, 4_2, 4_5, 5_3, 5_4, 6_3, 6_4, 7_2, 8_5\} & B_{38} &= \{1_6, 2_0, 3_2, 4_6, 5_0, 6_2, 7_1, 7_3, 7_4, 7_5, 8_5\} \\
B_{17} &= \{1_0, 1_1, 1_2, 4_3, 4_6, 5_3, 5_6, 6_0, 6_2, 7_2, 8_0\} & B_{39} &= \{1_2, 2_1, 3_6, 4_2, 5_1, 6_6, 7_3, 8_0, 8_3, 8_4, 8_5\} \\
B_{18} &= \{1_4, 2_5, 3_0, 4_4, 5_5, 6_0, 7_1, 7_2, 7_3, 7_6, 8_3\} & B_{40} &= \{1_2, 1_6, 2_2, 2_6, 3_3, 3_5, 4_3, 4_4, 4_5, 7_5, 8_3\} \\
B_{19} &= \{1_5, 2_6, 3_1, 4_5, 5_6, 6_1, 7_0, 7_2, 7_3, 7_4, 8_4\} & B_{41} &= \{1_1, 1_4, 2_2, 2_3, 3_2, 3_3, 5_1, 5_4, 5_6, 7_1, 8_4\} \\
B_{20} &= \{1_4, 2_3, 3_1, 4_4, 5_3, 6_1, 7_5, 8_0, 8_2, 8_5, 8_6\} & B_{42} &= \{1_3, 1_4, 1_5, 4_2, 4_6, 5_2, 5_6, 6_3, 6_5, 7_5, 8_3\} \\
B_{21} &= \{1_1, 2_0, 3_5, 4_1, 5_0, 6_5, 7_2, 8_2, 8_3, 8_4, 8_6\} & B_{43} &= \{1_0, 1_3, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 5_0, 5_3, 5_5, 7_0, 8_3\} \\
B_{22} &= \{1_0, 2_1, 3_3, 4_0, 5_1, 6_3, 7_2, 7_4, 7_5, 7_6, 8_6\} & B_{44} &= \{2_1, 2_3, 2_5, 4_1, 4_5, 5_0, 5_6, 6_0, 6_6, 7_5, 8_1\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{45} &= \{1_0, 1_5, 2_2, 2_3, 3_0, 3_5, 6_2, 6_3, 6_6, 7_3, 8_2\} & B_{51} &= \{3_2, 3_3, 3_6, 4_0, 4_5, 5_2, 5_3, 6_0, 6_5, 7_3, 8_2\} \\
B_{46} &= \{2_2, 2_4, 2_6, 4_2, 4_6, 5_0, 5_1, 6_0, 6_1, 7_6, 8_2\} & B_{52} &= \{3_1, 3_4, 3_5, 4_0, 4_2, 5_4, 5_5, 6_0, 6_2, 7_5, 8_4\} \\
B_{47} &= \{1_4, 1_6, 2_1, 2_2, 3_4, 3_6, 6_1, 6_2, 6_5, 7_2, 8_1\} & B_{53} &= \{3_2, 3_5, 3_6, 4_1, 4_3, 5_5, 5_6, 6_1, 6_3, 7_6, 8_5\} \\
B_{48} &= \{3_0, 3_3, 3_6, 4_2, 4_4, 5_0, 5_6, 6_2, 6_4, 7_0, 8_6\} & B_{54} &= \{1_2, 1_3, 1_4, 4_1, 4_5, 5_1, 5_5, 6_2, 6_4, 7_4, 8_2\} \\
B_{49} &= \{1_2, 1_4, 2_0, 2_6, 3_2, 3_4, 6_0, 6_3, 6_6, 7_0, 8_6\} & B_{55} &= \{1_0, 1_3, 2_0, 2_3, 3_4, 3_6, 4_4, 4_5, 4_6, 7_6, 8_4\} \\
B_{50} &= \{3_1, 3_2, 3_5, 4_4, 4_6, 5_1, 5_2, 6_4, 6_6, 7_2, 8_1\} & B_{56} &= \{3_0, 3_1, 3_4, 4_3, 4_5, 5_0, 5_1, 6_3, 6_5, 7_1, 8_0\}
\end{aligned}$$

C.3. $n = 11$

$$\mathbf{P} = \{A, B, 1_i, 2_i, 3_i, 4_i, 5_i, 6_i, 7_i\} \quad i = 0, 1, \dots, 10$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{6_0, 6_1, 6_2, 6_3, 6_4, 6_5, 6_6, 6_7, 6_8, 6_9, 6_{10}, A, B\} & B_{34} &= \{1_0, 1_{10}, 2_5, 3_0, 3_2, 3_8, 3_{10}, 4_3, 4_7, 6_2, 6_8, 7_3, 7_7\} \\
B_2 &= \{7_0, 7_1, 7_2, 7_3, 7_4, 7_5, 7_6, 7_7, 7_8, 7_9, 7_{10}, A, B\} & B_{35} &= \{2_3, 2_7, 3_5, 4_3, 4_4, 4_6, 4_7, 5_2, 5_8, 6_4, 6_6, 7_2, 7_8\} \\
B_3 &= \{1_1, 1_4, 2_4, 2_5, 3_5, 3_9, 4_3, 4_9, 5_1, 5_3, 6_0, 7_0, A\} & B_{36} &= \{1_1, 1_2, 2_7, 3_1, 3_2, 3_4, 3_{10}, 4_5, 4_9, 6_4, 6_{10}, 7_5, 7_9\} \\
B_4 &= \{1_7, 1_{10}, 2_6, 2_7, 3_2, 3_6, 4_2, 4_8, 5_8, 5_{10}, 6_0, 7_0, B\} & B_{37} &= \{1_7, 1_8, 2_2, 3_5, 3_7, 3_8, 3_{10}, 4_0, 4_4, 6_5, 6_{10}, 7_0, 7_4\} \\
B_5 &= \{1_0, 2_2, 2_4, 2_7, 2_9, 3_5, 3_6, 5_4, 5_7, 6_2, 6_9, 7_5, 7_6\} & B_{38} &= \{2_2, 2_6, 3_4, 4_2, 4_3, 4_5, 4_6, 5_1, 5_7, 6_3, 6_5, 7_1, 7_7\} \\
B_6 &= \{1_2, 1_5, 2_5, 2_6, 3_6, 3_{10}, 4_4, 4_{10}, 5_2, 5_4, 6_1, 7_1, A\} & B_{39} &= \{1_4, 1_5, 2_{10}, 3_2, 3_4, 3_5, 3_7, 4_1, 4_8, 6_2, 6_7, 7_1, 7_8\} \\
B_7 &= \{1_0, 1_8, 2_7, 2_8, 3_3, 3_7, 4_3, 4_9, 5_0, 5_9, 6_1, 7_1, B\} & B_{40} &= \{2_3, 2_{10}, 3_1, 4_0, 4_2, 4_3, 4_{10}, 5_4, 5_9, 6_0, 6_2, 7_4, 7_9\} \\
B_8 &= \{1_1, 2_3, 2_5, 2_8, 2_{10}, 3_6, 3_7, 5_5, 5_8, 6_3, 6_{10}, 7_6, 7_7\} & B_{41} &= \{1_1, 1_{10}, 3_3, 3_8, 4_0, 5_3, 5_4, 5_7, 5_8, 6_4, 6_7, 7_1, 7_{10}\} \\
B_9 &= \{1_5, 1_6, 2_0, 3_3, 3_5, 3_6, 3_8, 4_2, 4_9, 6_3, 6_8, 7_2, 7_9\} & B_{42} &= \{1_7, 1_{10}, 2_0, 2_{10}, 3_0, 3_4, 4_4, 4_9, 5_7, 5_9, 6_6, 7_6, A\} \\
B_{10} &= \{1_3, 1_6, 2_6, 2_7, 3_0, 3_7, 4_0, 4_5, 5_3, 5_5, 6_2, 7_2, A\} & B_{43} &= \{1_2, 1_5, 2_1, 2_2, 3_1, 3_8, 4_3, 4_8, 5_3, 5_5, 6_6, 7_6, B\} \\
B_{11} &= \{1_5, 1_8, 2_8, 2_9, 3_2, 3_9, 4_2, 4_7, 5_5, 5_7, 6_4, 7_4, A\} & B_{44} &= \{1_4, 2_0, 2_2, 2_6, 2_8, 3_9, 3_{10}, 5_0, 5_8, 6_2, 6_6, 7_9, 7_{10}\} \\
B_{12} &= \{1_6, 1_9, 2_5, 2_6, 3_1, 3_5, 4_1, 4_7, 5_7, 5_9, 6_{10}, 7_{10}, B\} & B_{45} &= \{1_8, 2_1, 2_4, 2_6, 2_{10}, 3_2, 3_3, 5_1, 5_4, 6_6, 6_{10}, 7_2, 7_3\} \\
B_{13} &= \{1_1, 1_9, 2_8, 2_9, 3_4, 3_8, 4_4, 4_{10}, 5_1, 5_{10}, 6_2, 7_2, B\} & B_{46} &= \{1_3, 1_4, 2_9, 3_1, 3_3, 3_4, 3_6, 4_0, 4_7, 6_1, 6_6, 7_0, 7_7\} \\
B_{14} &= \{1_0, 1_3, 2_0, 2_{10}, 3_6, 3_{10}, 4_1, 4_6, 5_1, 5_3, 6_4, 7_4, B\} & B_{47} &= \{2_1, 2_8, 3_{10}, 4_0, 4_1, 4_8, 4_9, 5_2, 5_7, 6_0, 6_9, 7_2, 7_7\} \\
B_{15} &= \{1_0, 1_3, 2_3, 2_4, 3_4, 3_8, 4_2, 4_8, 5_0, 5_2, 6_{10}, 7_{10}, A\} & B_{48} &= \{1_8, 1_9, 2_3, 3_0, 3_6, 3_8, 3_9, 4_1, 4_5, 6_0, 6_6, 7_1, 7_5\} \\
B_{16} &= \{1_2, 2_0, 2_4, 2_6, 2_9, 3_7, 3_8, 5_6, 5_9, 6_0, 6_4, 7_7, 7_8\} & B_{49} &= \{1_0, 1_1, 2_6, 3_0, 3_1, 3_3, 3_9, 4_4, 4_8, 6_3, 6_9, 7_4, 7_8\} \\
B_{17} &= \{1_9, 1_{10}, 2_4, 3_1, 3_7, 3_9, 3_{10}, 4_2, 4_6, 6_1, 6_7, 7_2, 7_6\} & B_{50} &= \{2_0, 2_7, 3_9, 4_0, 4_7, 4_8, 4_{10}, 5_1, 5_6, 6_8, 6_{10}, 7_1, 7_6\} \\
B_{18} &= \{1_{10}, 2_1, 2_3, 2_6, 2_8, 3_4, 3_5, 5_3, 5_6, 6_1, 6_8, 7_4, 7_5\} & B_{51} &= \{2_4, 2_8, 3_6, 4_4, 4_5, 4_7, 4_8, 5_3, 5_9, 6_5, 6_7, 7_3, 7_9\} \\
B_{19} &= \{1_6, 1_7, 2_1, 3_4, 3_6, 3_7, 3_9, 4_3, 4_{10}, 6_4, 6_9, 7_3, 7_{10}\} & B_{52} &= \{1_8, 1_{10}, 3_1, 3_6, 4_9, 5_1, 5_2, 5_5, 5_6, 6_2, 6_5, 7_8, 7_{10}\} \\
B_{20} &= \{2_2, 2_9, 3_0, 4_1, 4_2, 4_9, 4_{10}, 5_3, 5_8, 6_1, 6_{10}, 7_3, 7_8\} & B_{53} &= \{2_6, 2_{10}, 3_8, 4_6, 4_7, 4_9, 4_{10}, 5_0, 5_5, 6_7, 6_9, 7_0, 7_5\} \\
B_{21} &= \{1_4, 1_7, 2_7, 2_8, 3_1, 3_8, 4_1, 4_6, 5_4, 5_6, 6_3, 7_3, A\} & B_{54} &= \{1_4, 1_6, 3_2, 3_8, 4_5, 5_1, 5_2, 5_8, 5_9, 6_1, 6_9, 7_4, 7_6\} \\
B_{22} &= \{1_1, 1_9, 2_1, 2_2, 3_2, 3_6, 4_0, 4_6, 5_0, 5_9, 6_8, 7_8, A\} & B_{55} &= \{2_5, 2_9, 3_7, 4_5, 4_6, 4_8, 4_9, 5_4, 5_{10}, 6_6, 6_8, 7_4, 7_{10}\} \\
B_{23} &= \{1_5, 1_8, 2_4, 2_5, 3_0, 3_4, 4_0, 4_6, 5_6, 5_8, 6_9, 7_9, B\} & B_{56} &= \{2_0, 2_4, 3_2, 4_0, 4_1, 4_3, 4_4, 5_5, 5_{10}, 6_1, 6_3, 7_5, 7_{10}\} \\
B_{24} &= \{1_6, 1_9, 2_9, 2_{10}, 3_3, 3_{10}, 4_3, 4_8, 5_6, 5_8, 6_5, 7_5, A\} & B_{57} &= \{1_3, 1_5, 3_1, 3_7, 4_4, 5_0, 5_1, 5_7, 5_8, 6_0, 6_8, 7_3, 7_5\} \\
B_{25} &= \{1_3, 1_6, 2_2, 2_3, 3_2, 3_9, 4_4, 4_9, 5_4, 5_6, 6_7, 7_7, B\} & B_{58} &= \{1_0, 1_2, 3_4, 3_9, 4_1, 5_4, 5_5, 5_8, 5_9, 6_5, 6_8, 7_0, 7_2\} \\
B_{26} &= \{1_2, 1_{10}, 2_9, 2_{10}, 3_5, 3_9, 4_0, 4_5, 5_0, 5_2, 6_3, 7_3, B\} & B_{59} &= \{1_1, 1_5, 1_6, 1_{10}, 2_4, 2_7, 4_1, 4_{10}, 5_0, 6_5, 6_6, 7_4, 7_7\} \\
B_{27} &= \{1_4, 1_7, 2_3, 2_4, 3_3, 3_{10}, 4_5, 4_{10}, 5_5, 5_7, 6_8, 7_8, B\} & B_{60} &= \{1_5, 2_1, 2_3, 2_7, 2_9, 3_0, 3_{10}, 5_1, 5_9, 6_3, 6_7, 7_0, 7_{10}\} \\
B_{28} &= \{1_2, 1_{10}, 2_2, 2_3, 3_3, 3_7, 4_1, 4_7, 5_1, 5_{10}, 6_9, 7_9, A\} & B_{61} &= \{1_7, 2_0, 2_3, 2_5, 2_9, 3_1, 3_2, 5_0, 5_3, 6_5, 6_9, 7_1, 7_2\} \\
B_{29} &= \{1_1, 1_4, 2_0, 2_1, 3_0, 3_7, 4_2, 4_7, 5_2, 5_4, 6_5, 7_5, B\} & B_{62} &= \{2_1, 2_5, 3_3, 4_1, 4_2, 4_4, 4_5, 5_0, 5_6, 6_2, 6_4, 7_0, 7_6\} \\
B_{30} &= \{1_0, 1_8, 2_0, 2_1, 3_1, 3_5, 4_5, 4_{10}, 5_8, 5_{10}, 6_7, 7_7, A\} & B_{63} &= \{1_6, 1_8, 3_4, 3_{10}, 4_7, 5_0, 5_3, 5_4, 5_{10}, 6_0, 6_3, 7_6, 7_8\} \\
B_{31} &= \{1_3, 2_1, 2_5, 2_7, 2_{10}, 3_8, 3_9, 5_7, 5_{10}, 6_1, 6_5, 7_8, 7_9\} & B_{64} &= \{1_2, 1_4, 3_0, 3_6, 4_3, 5_0, 5_6, 5_7, 5_{10}, 6_7, 6_{10}, 7_2, 7_4\} \\
B_{32} &= \{1_2, 1_3, 2_8, 3_0, 3_2, 3_3, 3_5, 4_6, 4_{10}, 6_0, 6_5, 7_6, 7_{10}\} & B_{65} &= \{1_1, 1_3, 3_5, 3_{10}, 4_2, 5_5, 5_6, 5_9, 5_{10}, 6_6, 6_9, 7_1, 7_3\} \\
B_{33} &= \{1_9, 2_0, 2_2, 2_5, 2_7, 3_3, 3_4, 5_2, 5_5, 6_0, 6_7, 7_3, 7_4\} & B_{66} &= \{1_0, 1_9, 3_2, 3_7, 4_{10}, 5_2, 5_3, 5_6, 5_7, 6_3, 6_6, 7_0, 7_9\}
\end{aligned}$$

